

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
22	20.03	Коржанев ЕЕ.	М

✓ 2 Нам даны условия: ① $0 < x < \frac{1}{2}$; ② $0 < y < \frac{1}{2}$; ③ $y^3 - x^3 > y - x$
 ④ $y^2 - x^2 > y - x$; ⑤ $y^2 - x^2 > y^3 - x^3$

Рассмотрим ① условие, где $0 < k < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$, сложим эти 2 неравенства и получим, что $0 < k+y < 1 \Rightarrow (k+y) - \text{полож} \Rightarrow \text{возведем в квадрат} \Rightarrow 0 < k^2 + 2ky + y^2 < 1$

Рассмотрим (2) условие $(y^2 - x^2 \geq y - x)$, преобразуем данное неравенство: $y^2 - x^2 \geq y - x$

$$(y-x)(y+x) - (y-x) > 0$$

$$(y-k)/(y+k-1) < 0$$

или найдем, что $(y-k)(y+k-1) < 0$, но из 1 условия
следует, что $y+k < 1 \Rightarrow y+k-1$, где $y+k < 1$

$$\Rightarrow \text{mit } y+k-1 < 0 \text{ wegen } a \text{ m.k. } y_0$$

условия произведение > 0 , то $y - x < 0 \Rightarrow y < x$

Рассмотрим (3) неравенство и преобразуем:

$$y^3 - x^3 \nmid y - x$$

$$(y-k)(g^2 + kg + k^2) - (y-k) \cdot 0$$

$$(y-k)(y^2+ky+k^2-1) \vee 0$$

что $y - x < 0 \Rightarrow y^2 + ky + k^2 - 1 < 0$, чтобы доказать
верность утверждения Троверим, что $y^2 + ky + k^2$ не может
быть > 1

$$y^2 + ky + k^2 > 1 \Rightarrow -y^2 - ky - k^2 + 1 < 0, \text{ сложим это неравенство}$$

с неравенством из (1) $y^2 + 2ky + k^2 < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - y^2 - 1 - ky - k^2 < 0 \\ y^2 + 2ky + k^2 - 1 < 0 \end{cases} \text{ получим, что } ky < 0 \text{ и}$$

это упрощаем, что $0 < k < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y^2 + ky + k^2 < 1 \Rightarrow (y-k)(y^2 + ky + k^2 - 1) \geq 0$$

при данных условиях

N4

$$\cos(2k) + \cos^{2023}(2k) + 2024 \cdot \cos^{2024}(2k) = \sin k + \sin^{2023} k + 2024 \sin^{2024} k$$

$$(\cos(2k) - \sin k) + (\cos^{2023}(2k) - \sin^{2023} k) + 2024(\cos^{2024}(2k) - \sin^{2024} k) = 0$$

сложим с (1) - сложим когда производная = 0

$$(1) \Rightarrow (1)(\cos(2k) - \sin k) = 0 \quad (2) (\cos^{2023}(2k) - \sin^{2023} k) = 0 \quad (3) 2024(\cos^{2024}(2k) - \sin^{2024} k) = 0$$

$$1 - 2\sin^2 k - \sin k = 0$$

и к. степень нечетная, что

$$\cos^{2023}(2k) = \sin^{2023} k$$

$$\text{Пусть } \sin k = t, \text{ тогда}$$

$$\cos^{2023}(2k) = \sin^{2023} k$$

и к. степень нечетная, что можно преобразовать

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

можно преобразовать

$$\cos(2k) = \sin k$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\cos 2k = \sin k$$

$\Rightarrow$ приводим к (1)

$$t_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ приводим к (1)

$$t_2 = \frac{-1-3}{2} = -1$$

Преобразование

Вам $t = \sin k$, что

$$\sin k = \frac{1}{2}$$

$$\sin k = -1$$

$$k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

$$k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$k = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

I Проверим случаи, возможно, что $\cos 2k = 0$
 $\sin k = 0$

$$\Rightarrow \cos 2k = 0$$

$$2k = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$k = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$\Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow$ нет случаев, когда $\cos 2k = 0$ и $\sin k = 0$ одновременно



II Проверим случаи, когда $\cos 2k = 0$ тогда

$$\sin k + \sin^{2023}(k) + 2024 \sin^{2024}(k) = 0$$

$$\sin k (1 + \sin^{2022}(k) + 2024 \sin^{2023}(k)) = 0, \text{ где } (1 + \sin^{2022}(k) + 2024 \sin^{2023}(k)) > 0$$

$$\sin k = 0$$

$$k = \pi n \text{ (не удов. условию } \cos 2k = 0)$$

$\Rightarrow$ нет корней

т.к. $\sin k$ в четной степени

$$\Rightarrow \sin^{2022} k \geq 0 \text{ и } \sin^{2024} k \geq 0$$

$\Rightarrow (1 + \sin^{2022} k + 2024 \sin^{2023} k) > 0$
нет корней

III Проверим случаи, когда $\sin k = 0$ тогда

$$\cos 2k + \cos^{2023}(2k) + \cos^{2024}(2k) = 0$$

$$\cos 2k (1 + \cos^{2022}(2k) + \cos^{2023}(2k)) = 0$$

$$\cos 2k = 0 \text{ и } 1 + \cos^{2022}(2k) + \cos^{2023}(2k) \text{ - не имеют корней}$$

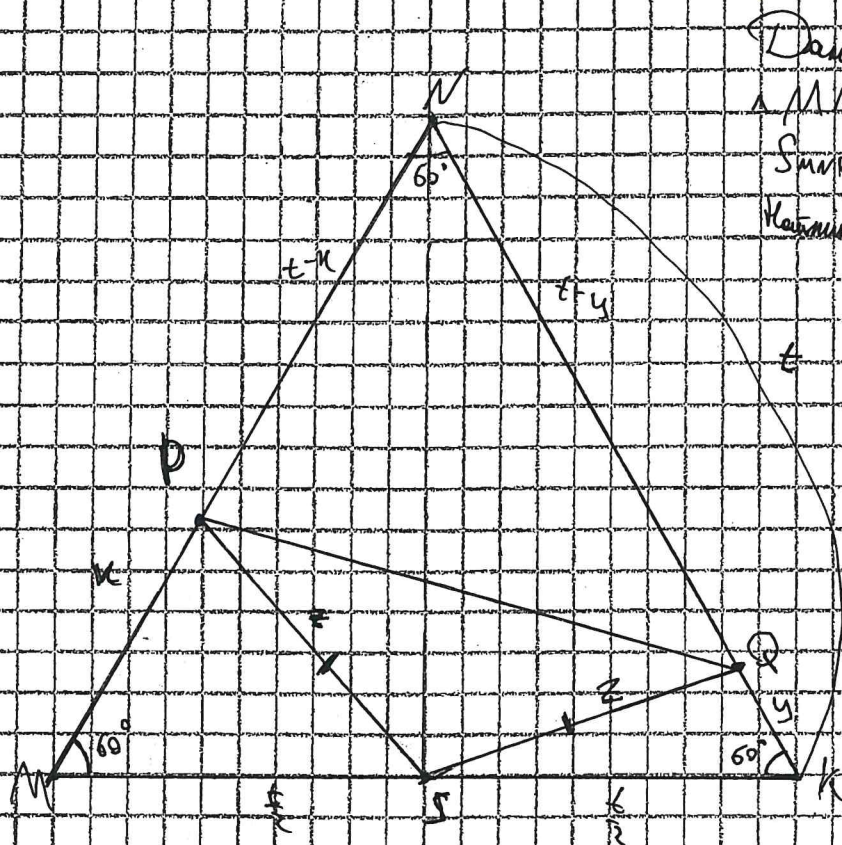
$$k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2} \text{ (не удов. условию } \sin k = 0) \text{ т.к. } \cos(2k) \text{ в четной степени } \Rightarrow \cos^{2022}(2k) > 0 \text{ и } \cos^{2024}(2k) > 0$$

$\Rightarrow$ мы получили корни при $\cos 2k = \sin k$

Ответ: $k = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, k = \frac{\pi}{6} + \pi n, k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$



N5



Дано:
 $\triangle MNK$ - равност.
 $S_{MNK} = 1$
 Найти: длину PQ

Решение

- 1) $\triangle MNK$ - равност. $\Rightarrow S_{MNK} = \frac{MN^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{2 S_{MNK}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 S_{MNK}}{\sin 60^\circ}}$
- 2) Пусть $MN = MK = NK = t$, тогда $MS = SK = \frac{MK}{2} = \frac{t}{2}$ (S - середина)
 $PS = PQ = z$, $MP = k$ и $QK = y \Rightarrow PN = MN - MP = t - k$
 $NQ = NK - KQ = t - y$

3) Рассмотрим $\triangle PNQ$ по $\cos$

$$PQ^2 = PN^2 + NQ^2 - 2PN \cdot NQ \cdot \cos 60^\circ$$

$$PQ^2 = (t - k)^2 + (t - y)^2 - 2(t - k)(t - y) \cdot \frac{1}{2}$$

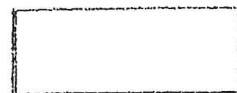
$$PQ^2 = t^2 - 2kt + k^2 + t^2 - 2ty + y^2 - (t^2 - kt - ty + ky) = t^2 - kt + k^2 - ty + y^2 - ky$$

$$PQ^2 = t^2 - kt + k^2 - ty + y^2 - ky$$

4) Рассмотрим $\triangle MPS$ по $\cos$

$$PS^2 = MP^2 + MS^2 - 2MP \cdot MS \cdot \cos 60^\circ$$

$$z^2 = k^2 + \frac{t^2}{4} - 2k \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow z^2 = k^2 - \frac{kt}{2} + \frac{t^2}{4}$$



5) Рассмотрим $\triangle SKK$ по $\odot COS$

$$SQ^2 = SK^2 + QK^2 - 2QK \cdot SK \cdot \cos 60$$

$$z^2 = \frac{t^2}{4} + y^2 - \frac{y \cdot t}{2}$$

(4) + (5) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} z^2 = \frac{t^2}{4} + y^2 - \frac{y \cdot t}{2} \\ z^2 = \frac{t^2}{4} + k^2 + \frac{k \cdot t}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{4} + y^2 - \frac{y \cdot t}{2} = \frac{t^2}{4} + k^2 - \frac{k \cdot t}{2}$$

$$y^2 - k^2 = \frac{y \cdot t}{2} - \frac{k \cdot t}{2}$$

$$(y - k)(y + k) = (y - k) \frac{t}{2}$$

т.к. $y \neq k$ (по $\triangle PQR$ и MK)

$$\text{по } (6) \quad k + y = \frac{t}{2} \rightarrow (3)$$

$$\text{из } (4) \rightarrow \frac{k^2}{2} - \frac{k \cdot t}{2} + \frac{t^2}{4} - z^2 = 0$$

по формуле Виета

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{t^2}{4} - z^2 \Rightarrow k_2 = \frac{t^2}{4} - z^2 \rightarrow (3)$$

$$k_1 + k_2 = \frac{t}{2}, \text{ где } k_1 = k, k_2 = y \text{ (из } (6))$$

$$(D > 0; \frac{t^2}{4} - 4(z^2 - \frac{t^2}{4}) > 0)$$

$$(\frac{4t^2 - 3t^2}{4} > 0)$$

Тогда

$$PQ^2 = t(t - (k + y)) + y^2 - ky - k^2$$

$$PQ^2 = t(t - (k + y)) + (y + k)^2 - 3ky$$

$$PQ^2 = t(t - \frac{t}{2}) + \frac{t^2}{4} - 3(\frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{4})$$

$$PQ^2 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} - \frac{3t^2}{4} + 3z^2$$

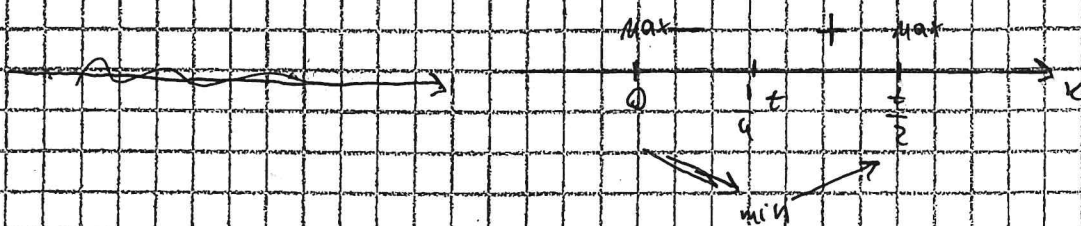
$$PQ^2 = 3z^2 \leftarrow (z^2 = \frac{t^2}{4} + k^2 - \frac{k \cdot t}{2})$$

$$PQ^2 = \frac{3t^2}{4} + 3k^2 - \frac{3tk}{2}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{3t^2}{4} + 3k^2 - \frac{3tk}{2}}, \text{ где } PQ = f(x) \text{ и } k \in [0; \frac{t}{4}] \cup [\frac{t}{4}; \frac{t}{2}]$$

$$f'(k) = \left(\sqrt{\frac{3t^2}{4} + 3k^2 - \frac{3tk}{2}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3t^2}{4} + 3k^2 - \frac{3tk}{2}}} \left(\frac{3t^2}{4} + 3k^2 - \frac{3tk}{2} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3t^2}{4} + 3k^2 - \frac{3tk}{2}}} \left(6k - \frac{3t}{2} \right) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}t$$



$$\Rightarrow k = \frac{1}{4}t$$

$\Rightarrow$ когда $k=0 \Rightarrow PQ - \text{max}$
иногда когда $k \in (0; \frac{t}{4})$

$\Rightarrow PQ$ стремится к min

и $k \in (\frac{t}{4}; \frac{t}{2})$ PQ снова максимум
возрастает и стремится max

$$\text{в } k = \frac{t}{2} \quad PQ = \text{max}$$

PQ при $k=0$

$$PQ = \frac{t\sqrt{3}}{2}$$

PQ при $k = \frac{1}{4}t$

$$PQ = \sqrt{\frac{3t^2}{4} + \frac{3 \cdot \frac{t^2}{16}}{8} - \frac{3 \cdot \frac{t^2}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{2t^2 + 3t^2 - 6t^2}{16}} = \frac{3t}{4}$$

$$PQ \in \left(\frac{3t}{4}, \frac{t\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow PQ \in \left(\frac{3}{4} \sqrt{25}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{25} \right]$$

$$PQ \in \left(\frac{3}{4} \sqrt{25}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{25} \right] \Rightarrow PQ \in \left(\frac{15}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right]$$



Ответ: $PQ \in \left(\frac{\sqrt{33} - 4}{2}, \sqrt{3} \right]$

1. Нужно найти такое число N (четырехзначное), при котором $N \rightarrow \min$, где a, b, c, d - цифры числа N
 $a+b+c+d$

N можно представить как $N = 1000a + 100b + 10c + d$ ($b, c, d \in [0; 9]$, $a \in [1; 9]$)
 a, b, c, d - цифры

из $N \rightarrow \min$
 $a+b+c+d \rightarrow \max$

Рассмотрим все возможные суммы $a+b+c+d$ и найдем min возможное N .

Начнем с $S = a+b+c+d = 36$ и будем уменьшать a .

при $S=36$ $a=b=c=d=9$ $N = \frac{36}{36} = \frac{1111}{4}$ } (мы уменьшаем сначала a до 9, потом b до 9 и т.д.)
 при $S=35$ $a=8, b=c=d=9$ $N = \frac{8359}{36}$

и так далее пока не дойдем до $S=20$

при $S=20$ $a=1, b=1, c=d=9$ $\frac{1199}{20} = 59 \frac{19}{20}$

при $S=19$ $a=1, b=0, c=d=9$ $\frac{1099}{19} = 57 \frac{16}{19}$

при $S=18$ $a=1, b=0, c=8, d=9$ $\frac{1089}{18} = 60 \frac{9}{18}$

$\Rightarrow$ при $S=5$ получили наименьший минимум при наибольшем уменьшении S . Остаток будет возрастать

Ответ: $N = 1089$