Место для скобы

Шифр 07882

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 7 б. | | Червинская А.С. | [подпись] |

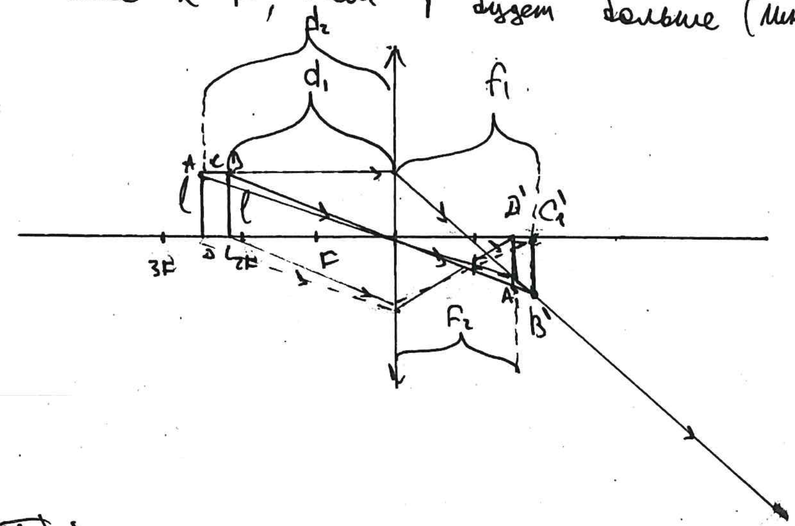
№1

Дано:
$\Gamma_1 = 2{,}5$
$\Gamma_2 = 6$

$\frac{S_2}{S_1} - ?$

Решение:

1) Чтобы стороны прямоугольника увеличивались, то прямоугольник должен находиться м/у 2F и F, чем ближе к F, тем Г будет больше (линза собирающая)



~~После~~ После преломлений линзой, мы получаем изображение в виде трапеции (прямоуг.), Пусть $AB = x$, $AD = BC = l$, ~~и~~ $D'C' = Z$

Из рисунка видно, что $AB = x$, где $x = d_2 - d_1$ и $D'C' = z$, где $z = f_1 - f_2$

Из условий задачи известно, что $\frac{C_1'B'}{CB} = \Gamma_2$ и $\frac{D'A'}{DA} = \Gamma_1 \Rightarrow C'B' = \Gamma_2 CB$, $D'A' = \Gamma_1 DA$ (где $CB = DA = l$)

$\Rightarrow C'B' = \Gamma_2 l$, $D'A' = \Gamma_1 l$, мы можем сказать, что $\Gamma_1 = \frac{f_2}{d_2}$ и $\Gamma_2 = \frac{f_1}{d_1} \Rightarrow f_1 = d_1\Gamma_2$, $f_2 = \Gamma_1 d_2$

$S_{ABCD} = S_1$, $\Rightarrow S_1 = AD \cdot AB = l \cdot x$ ($x = d_2 - d_1$)

$S_{A'B'C'D'} = S_2$ $S_2 = \frac{(A'D' + B'C')\cdot D'C'}{2} = \frac{(\Gamma_1 l + \Gamma_2 l) Z}{2}$ ($z = f_1 - f_2$)

Место для скобы

Шифр 07882

По формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}$, где $f_1=d_1\Gamma_2$

$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}$, где $f_2=\Gamma_1 d_2$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1\Gamma_2} \Rightarrow \frac{1}{F}=\frac{\Gamma_2+1}{d_1\Gamma_2} \Rightarrow d_1=\frac{F(\Gamma_2+1)}{\Gamma_2} \Rightarrow f_1=F(\Gamma_2+1)$$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_2\Gamma_1} \quad \frac{1}{F}=\frac{\Gamma_1+1}{d_2\Gamma_1} \Rightarrow d_2=\frac{F(\Gamma_1+1)}{\Gamma_1} \quad f_2=F(\Gamma_1+1)$$

$\to k$ $\to z$

$$k=d_2-d_1=\frac{F(\Gamma_1+1)}{\Gamma_1}-\frac{F(\Gamma_2+1)}{\Gamma_2}=F\left(\frac{7}{5}-\frac{7}{6}\right)=\frac{F\cdot 7}{30}$$

$$z=f_1-f_2=F(\Gamma_2+\cancel{1}-\Gamma_1-\cancel{1})=F\cdot 3{,}5$$

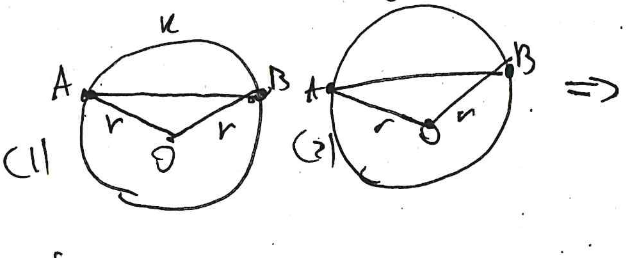
в $S_1$ и $S_2$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\cancel{l}(\Gamma_1+\Gamma_2)\cdot z}{2\,\cancel{l}\cdot k}=\frac{(2{,}5+6)\cdot 3{,}5\cancel{F}\cdot 30}{2\cdot 7\cancel{F}}=63{,}75$$

Ответ: 63,75 ✓ 20б.

№21

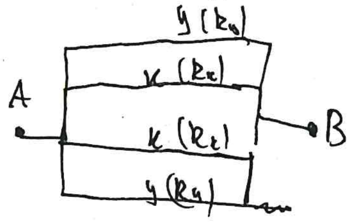
Нам даны 2 одинаковых кольца радиусом r, которые взм ⊥ друг другу, требуется найти отношение сопротивлений м/у A и B и к кольца. Известно, что кольцо отсекает от другого $k=\frac{l}{4}$ ($l$ – длина кольца). Докажем, что кольца отсекают равные длины




$\Rightarrow$ из $\triangle OAB$ по т.cos, мы получаем, что $\angle k=\angle z$ т.к $\triangle$ равны $\Rightarrow \breve{k}=\breve{z}$

Из условия известно, что $S_1=S_2$ и материалы одинаковы. Напишем формулу для R: $R=\frac{\rho L}{S}$ (т.к $S$ и $\rho=const$, то $R$ зависит только от длины)

Соединения м/у A и B, можно представить схемой




, где x и y длины проводников, из $R=\frac{\rho L}{S}$

, получаем $R_x=\frac{\rho x}{S}$ и $R_y=\frac{\rho y}{S}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}+\frac{1}{R_y} \text{ (|| соед проводов)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{AB}}=\frac{2}{R_x}+\frac{2}{R_y} \Rightarrow R_{AB}=\frac{R_x\cdot R_y}{2(R_x+R_y)}$$

Сопротивление кольца можно представить как $R=\frac{\rho l}{S}$,

но $l=x+y$, $\Rightarrow \frac{R_{AB}}{R}=\frac{R_x\cdot R_y}{2(R_x+R_y)R}=\cancel{\frac{\rho x\cdot \rho y}{2(\rho}}=\cancel{\ }$

$$=\frac{\rho x\cdot \rho y\cdot S}{S\cdot S\cdot 2\left(\frac{\rho x}{S}+\frac{\rho y}{S}\right)\rho l}=\frac{\rho^2 x\cdot y\, S^2}{2S^2(\rho l\cdot \rho l)}=\frac{x\cdot y}{2l^2}$$

, но $x=\frac{1}{4}l \Rightarrow y=\frac{3}{4}l$

$$\frac{R_{AB}}{R}=\frac{1\,l\cdot 3\,l}{4\cdot 4\cdot 2l^2}=\frac{3}{16}$$

Ответ: $\cancel{\frac{R_{AB}}{R}=}$ $\frac{R_{AB}}{R}=\frac{3}{16}$ — 13б

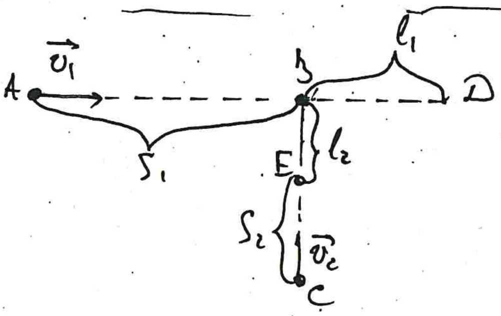
№2

Дано:

$v_1=8$ миль/ч

$v_2=10$ миль/ч

$a_{min}$ - ?




Из рисунка мы можем узнать расстояние AB (расстояние до пересечения траекторий) $AB=S_1=8$ миль

и расстояние $CB=S_2+l_2=10$ миль

Пусть расстояние $l_1=BD$ - после пересечения траекторий 1 кораблем

Нам нужно найти $|a_1|=|a_2|=a\to min \Rightarrow$ условие $l_1\geq 1$, можно сказать $l_1=1$ $(a=a_{min})$

Место для скобы

Шифр 07882

Пусть $t_1$ - время за которое I корабль проходит $S_1$, $\Delta t$ - время за которое I корабль проходит $l_1$

Расчитаем $S_2$ и $S_1$ $\left(S = v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)$ для 2 кораблей

$$S_1 = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2}$$
$$S_2 = v_2 t_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

Найдем $v$ I корабля после пересечения траекторий $v_1' = v_1 + at_1$

$\Rightarrow l_1 = v_1' \Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$ и $l_2 = S_2 + l_2 = v_2(t_1 + \Delta t) + \frac{a(t_1+\Delta t)^2}{2}$

Получаем 3 уравнения:
$$\begin{cases} S_1 = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ S_2 + l_2 = v_2(t_1 + \Delta t) + \frac{a}{2}(t_1+\Delta t)^2 \\ l_1 = v_1' \Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ S_2 + l_2 = v_2 t_1 + v_2 \Delta t + \frac{a}{2}(t_1^2 + 2t_1 \cdot \Delta t + \Delta t)^2 \\ l_1 = (v_1 + at_1)\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ S_2 + l_2 = v_2 t_1 + v_2 \Delta t + \frac{at_1^2}{2} + at_1\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \\ l_1 = v_1 \Delta t + at_1 \Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_2 + l_2 - l_1 = v_2 t_1 + (v_2 - v_1)\Delta t + \frac{at_1^2}{2} \\ S_1 = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_2 + l_2 - l_1 - S_1 = (v_2 - v_1) t_1 + (v_2 - v_1)\Delta t$$

$$t_1 + \Delta t = \frac{S_2 + l_2 - l_1 - S_1}{v_2 - v_1}$$

, но $S_2 + l_2 = v_2(t_1 + \Delta t) + \frac{a}{2}(t_1 + \Delta t)^2$

$$a = \frac{2(S_2 + l_2 - v_2(t_1+\Delta t))}{(t_1+\Delta t)^2} = \frac{2\left(S_2 + l_2 - v_2\left(\frac{S_2+l_2-l_1-S_1}{v_2-v_1}\right)\right)}{\left(\frac{S_2+l_2-l_1-S_1}{v_2-v_1}\right)^2} = \frac{2\left(10 - \frac{10(10-9)}{10-8}\right)}{\left(\frac{10-1-8}{10-8}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(10-5)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 40\ м/с^2$$

Ответ: $a_{min} = 40\ м/с^2$ – 1/20

Место для скобы

**Шифр**

# №5

**Дано:**

$H = 0{,}01$ м

$d_{12} = 2\cdot 10^{-3}$ м

$d_{23} = 4\cdot 10^{-3}$ м

$\varepsilon = 4$

$U = 400\cdot 10^{3}$ В

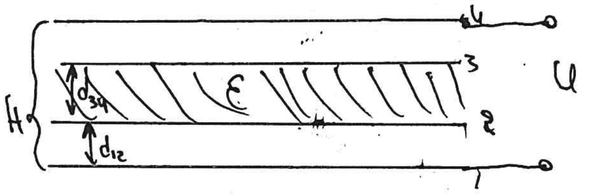
$S = L\times L = 100\ см^2 = 0{,}01\ м^2$

$E_{пр} = 20\cdot 10^{3}$ В/мм $= 20\cdot 10^{6}$ В/м

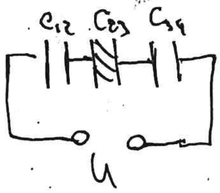
$\varepsilon_0 = 8{,}86\cdot 10^{-12}$

$V_\varepsilon$ - ?

**Решение**




(1) Всю эту коробочку можно представить в виде цепи из 3 конденсаторов (последов. соед.)




т.к. C подключены последов., то

$$\begin{cases} q_{общ} = q_{12} = q_{23} = q_{34} \\ U = U_{12} + U_{23} + U_{34} \\ \dfrac{1}{C_{общ}} = \dfrac{1}{C_{12}} + \dfrac{1}{C_{23}} + \dfrac{1}{C_{34}} \end{cases} \Rightarrow C_{общ} = \frac{C_{12}\cdot C_{23}\cdot C_{34}}{C_{12}\cdot C_{23} + C_{12}\cdot C_{34} + C_{23}\cdot C_{34}}$$

, где $q = CU \Rightarrow U = \dfrac{q}{C}$ и $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$

$H = const$, где $H = d_{12} + d_{23} + d_{34} \Rightarrow d_{34} = H - d_{12} - d_{23} = 0{,}01 - 2\cdot 10^{-3} - 4\cdot 10^{-3} = 4\cdot 10^{-3}$ м

$$q_{общ} = U C_{общ} = \frac{U\cdot \varepsilon\varepsilon_0^{\cancel{3}} S^{\cancel{3}}}{d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\left(\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0^2 S^2}{d_{12}\cdot d_{23}} + \dfrac{\varepsilon_0^{\cancel{2}} S^{\cancel{2}}}{d_{12}\cdot d_{34}} + \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0^{\cancel{2}} S^{\cancel{2}}}{d_{34}\cdot d_{23}}\right)} = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\left(\dfrac{\varepsilon}{d_{12}\cdot d_{23}} + \dfrac{1}{d_{12}\cdot d_{34}} + \dfrac{\varepsilon}{d_{23}\cdot d_{34}}\right)} \to (*)$$

$(q_{общ} \approx 5\cdot 10^{-7}\ Кл)$

~~$U = U_{12} + U_{23} + U_{34} = q_{общ}$~~

$\Rightarrow$ мы нашли $q_{общ} \Rightarrow$ мы можем найти напряжение на каждом конденсаторе $\Rightarrow U_{12} = \dfrac{q_{общ}}{C_{12}} = \dfrac{q_{общ}\, d_{12}}{\varepsilon_0 S} \to (*)$

(2) После заливки еще диэлектрика 3 пластина начала двигаться $\Rightarrow C_{23}$ и $C_{34}$ будут изменяться (будут $C'_{23}$ и $C'_{34}$) $\Rightarrow U_{23}$ и $U_{34}$ тоже изменяться и будут $U'_{23}$ и $U'_{34}$ и $U = U_{12} + U'_{23} + U'_{34}$, но т.к. $U'_{23}$ мы также пробьем, можем $U'_{23}$ расписать как $U'_{23} = E_{пр}\cdot d'_{23}$

после заливки $d_{23} < d'_{23}$ и $d_{34} > d'_{34}$

Распишем $C'_{34} = \dfrac{\varepsilon_0\cdot S}{d'_{34}}$, но $d_{23} + d_{34} = const = H - d_{12} \Rightarrow d'_{34} = H - d_{12} - d'_{23}$

Место для скобы

Шифр

получим, $C_{34}' = \frac{\varepsilon_0 S}{(H-d_{12}-d_{23}')}$ $\Rightarrow$ $U_{34}' = \frac{q_{общ}}{C_{34}'} = \frac{q_{общ}(H-d_{12}-d_{23}')}{\varepsilon_0 S}$

Подставим все полученные напряжения в сумму $U$, получим

$U = U_{12} + E_{пр}\cdot d_{23}' + \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}(H-d_{12}-d_{23}') \Rightarrow$ мы находим $d_{23}'$

$U - U_{12} = E_{пр}\cdot d_{23}' + \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}(H-d_{12}) - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S} d_{23}' \Rightarrow U - U_{12} - \frac{q_{общ}(H-d_{12})}{\varepsilon_0 S} = d_{23}'\left(E_{пр} - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}\right)$

$$\Rightarrow d_{23}' = \frac{\left(U - U_{12} - \frac{q_{общ}(H-d_{12})}{\varepsilon_0 S}\right)}{\left(E_{пр} - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}\right)} \longrightarrow (*)$$

Нам надо найти $V_\varepsilon$ диэлектрика, который надо закачать

$\Rightarrow V_\varepsilon = V_2 - V_1 = S\cdot d_{23}' - S\, d_{23}$. $\qquad V = S\cdot d$

получаем $(*)$ $V_\varepsilon = S(d_{23}' - d_{23})$

$$V_\varepsilon = S\left(\frac{\left(U - U_{12} - \frac{q_{общ}(H-d_{12})}{\varepsilon_0 S}\right)}{\left(E_{пр} - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}\right)} - d_{23}\right)$$

$$V_\varepsilon = S\left(\frac{\left(U - \frac{q_{общ}\cdot d_{12}}{\varepsilon_0 S} - \frac{q_{общ}(H-d_{12})}{\varepsilon_0 S}\right)}{\left(E_{пр} - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}\right)} - d_{23}\right) = \left(\frac{U - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}(\cancel{d_{12}} + H)}{E_{пр} - \frac{q_{общ}}{\varepsilon_0 S}} - d_{23}\right)S =$$

$\approx 6{,}126\cdot 10^{-5}\, м^3$

Ответ: $V_\varepsilon \approx 6{,}126\cdot 10^{-5}\, м^3$ — 12б

Место для скобы

Шифр

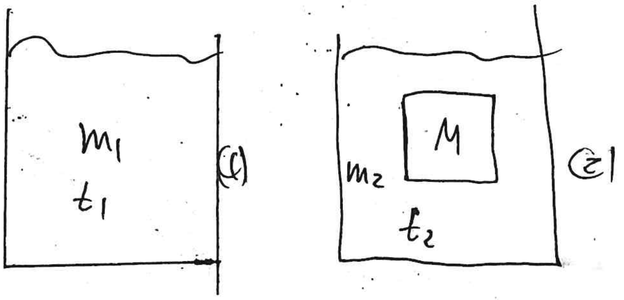
№3

Дано:
$m_2 = 4$ кг
$m_1 = 3$ кг
$M = 1$ кг
$C_{Al} = 900$
$C_в = 4200$
$t_2 = 50°C$
$t_1 = 10°C$

$n - ?$

Решение

Нам нужно число n циклов при котором $\Delta t < 5$ ($\Delta t$ - разность воды м/у калориметрах)




1 действие мы переносим брусок из (2) в (1) и держим до теплового баланса $Q_1 = Q_{Al_1}$ $\qquad Q = Cm\Delta t$

$$C_в m_1 (t_3 - t_1) = C_{Al} M (t_2 - t_3)$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{M C_{Al} t_2 + m_1 C_в t_1}{M C_{Al} + m_1 C_в}$$

2 действие цикла, мы переносим брусок обратно во (2) и держим до теплового баланса $Q_2 = Q_{Al_2}$

$$C_в m_2 (t_2 - t_4) = C_{Al} \cdot M (t_4 - t_3)$$

$$\Rightarrow t_4 = \frac{C_в m_2 t_2 + C_{Al} M t_3}{C_в m_2 + C_{Al} \cdot M} \leftarrow t_3$$

$$t_4 = \frac{C_в m_2 t_2 + C_{Al} M \frac{(M C_{Al} t_2 + m_1 C_в t_1)}{M C_{Al} + m_1 C_в}}{C_в m_2 + C_{Al} \cdot M} = \frac{C_в \cdot C_{Al} \cdot M \cdot m_2 t_2 + m_1 m_2 C_в^2 t_2 +}{(C_в m_2 + C_{Al} \cdot M)((C_{Al} \cdot M + C_в m_1)}$$

$$\frac{+ M^2 C_{Al}^2 t_2 + m_1 C_в t_1 \cdot C_{Al} \cdot M}{} = \cancel{t_2 C_{Al} M (C_в m_2 + M C_{Al}) + t_1 (}$$

$$t_4 - t_3 = \frac{C_в \cdot C_{Al} \cdot M m_2 \cdot t_2 + m_1 m_2 C_в^2 \cdot t_2 + M^2 C_{Al}^2 t_2 + m_1 M C_{Al} C_в \cdot t_1 - (M C_{Al} t_2 + m_1 C_в t_1)(C_в m_2 + C_{Al} \cdot M)}{(C_в m_2 + C_{Al} \cdot M)(C_в \cdot m_1 + C_{Al} \cdot M)}$$

$$t_4 - t_3 = \frac{C_в C_{Al} \cancel{M m_2 t_2} + m_1 m_2 C_в^2 t_2 + \cancel{M^2 C_{Al}^2 t_2} + \cancel{m_1 M C_{Al} C_в t_1} - \cancel{M C_{Al}^2 t_2} - m_1 m_2 C_в^2 t_1 - \cancel{M C_{Al} t_2 C_в m_2}}{(C_в m_2 + C_{Al} \cdot M)(C_в \cdot m_1 + C_{Al} \cdot M)}$$

Место для скобы

**Шифр**

$$\cancel{t} = \cancel{C_{Al}\cdot M \cdot m_1 C_6 t_1} = \frac{m_1 m_2 C_6^2 (t_2 - t_1)}{(C_6 m_2 + C_{Al}\cdot M)(C_6\cdot m_1 + C_{Al}\cdot M)}$$

для $t_6$ и $t_5$, получим

$$(*)\ t_6 - t_5 = \frac{m_1 m_2 C_6^2 (t_4 - t_3)}{(C_6 m_2 + C_{Al}\cdot M)(C_6\cdot m_1 + C_{Al}\cdot M)}$$, где $\begin{cases} t_5 = \dfrac{M C_{Al}\cdot t_4 + m_1 C_6 t_3}{M C_{Al} + m_1 C_6} \\ t_6 = \dfrac{C_6\cdot m_2\cdot t_4 + C_{Al} M t_5}{C_{Al} M + C_6\cdot m_2} \end{cases}$

$$t_6 - t_5 = \frac{m_1 m_2 C_6^2}{(C_6\cdot m_2 + C_{Al} M)(C_6\cdot m_1 + C_{Al} M)} \cdot \frac{m_1 m_2 C_6^2 (t_2 - t_1)}{(C_6 m_2 + C_{Al} M)(C_6\cdot m_1 + C_{Al} M)}$$

подставим $t_4 - t_3$ в $\to (*)$

$$t_6 - t_5 = \frac{m_1^2 m_2^2 C_6^4 (t_2 - t_1)}{(C_6 m_2 + C_{Al}\cdot M)^2 (C_6\cdot m_1 + C_{Al} M)^2} \quad - (2\ цикл)$$

$$\Rightarrow \cancel{t_n} \ \Delta t_n = \left(\frac{m_1\cdot m_2 C_6^2}{(C_6 m_2 + C_{Al} M)(C_6\cdot m_1 + C_{Al}\cdot M)}\right)^n (t_2 - t_1) < 5$$

(можно выявить закономерность)

$$\left(\frac{12\cdot 4200^2}{(4200\cdot 4 + 500\cdot 1)(4200\cdot 3 + 500)}\right)^n \cdot 80 < 5$$

$$(0{,}88581)^n < 0{,}0625$$

$$\log_{0{,}8858} 0{,}0625 < n$$

$n > 22{,}6$ т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $n = 23$ раза

Ответ: $n = 23$

√ 20б.