

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
158	13.03.25	Лугина Л.А.	Л

Шифр 025-2-М-2

Дано: $x > y$,

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

Найти: $\frac{x+y}{x-y} = ?$

Решение

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | \cdot 3$$

$$3x^2 + 3y^2 = 10xy$$

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy = 0$$

Разделим обе части уравнения на y^2 :

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3 - 10\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Пусть, $t = \frac{x}{y}$:

$$3t^2 + 3 - 10t = 0$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$a = 3, b = -10, c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Поскольку $x > y$, то $\frac{x}{y} > 1$, $\Rightarrow t = \frac{x}{y}$.

Получается, $x = 3y$

Подставим это значение в выражение:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: 2

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-2

✓2

Дано:

$$a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

Доказать:

$$a + b + c \geq 7$$

Решение

Вспользуемся методом от противного:
Предположим, что $a + b + c < 7$:

Подставим минимально возможные
значения для a, b и c : $a = 1, b = 2, c = 3$.
Проверим, удовлетворяет ли это условие *нельзя*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 21:$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14. \quad 14 < 21$$

Таким образом, если $a + b + c < 7$, то $a^2 + b^2 + c^2 < 21$, что
противоречит условию. Следовательно, предположение о том, что
 $a + b + c < 7$ неверно.

Таким образом, мы приходим к выводу, что $a + b + c \geq 7$, что и
нужно было доказать

✓4

Доказать, что X_1 и X_2 являются корнями уравнения $X^2 + pX - \frac{1}{2p^2}$ и $p \neq 0$
выполняется $X_1^4 + X_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$

Решение

По теореме Виета: $X_1 + X_2 = -p$; $X_1 \cdot X_2 = -\frac{1}{2p^2}$

$$X_1^4 + X_2^4 = (X_1 + X_2)^4 - 2X_1X_2(2(X_1 + X_2)^2 - X_1X_2) =$$

$$p^4 + \frac{1}{p^2} \cdot \left(2p^2 + \frac{1}{2p^2}\right) = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geq 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} + 2 =$$

$$= \sqrt{2} + 2$$

Дано:

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

Найти:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{99} = ?$$

Решение

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

a_n можно представить как:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \frac{2}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3}$$

Если рассмотреть произведение $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{99}$ можно заметить, что каждый член a_n содержит слагаемые, которые могут сокращаться.

№5

Дано: чет-ик $ABCF$, вписанный в окружность, $\angle P = \angle A$, $BQ = BC$

Найти: $PO = QO$ или $PO \neq QO = ?$

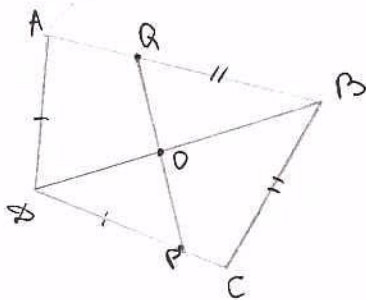


рис. 1

Решение

нет, это утверждение неверно.

Хотя $ABCF$ вписан в окружность и $\angle P = \angle A$, $BQ = BC$, это не гарантирует, что

BQ делит PQ пополам. Геометрические отношения, созданные этими условиями не описывают положение точки пересечения BQ и PQ , которая может быть как в середине PQ , так и в любой другой точке. Можно привести множество контрпримеров, где это условие не выполняется (рисунк 2).

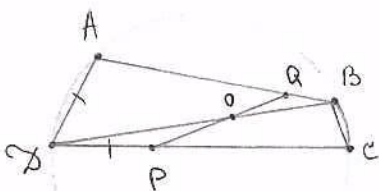


рис. 2

Для того, чтобы прямая $B\bar{D}$ делила PQ пополам, нужны дополнительные условия, например, $ABCD$ должен быть равнобедренной трапецией, либо прямоугольником, либо квадратом. В этих случаях симметрия будет гарантирована и утверждение станет верным. Однако в общем случае для произвольного вписанного четырехугольника это не так.

Ответ: утверждение верно не всегда.