Место для скобы

Шифр 09053

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	20.03.24	Хмылёва Т.Е	[signature]

4. 1) $0<a<\frac{1}{2}$, $0<b<\frac{1}{2}$

2) $b^2-a^2>b-a$

$(b-a)(b+a)>b-a$

$(b-a)(b+a)-(b-a)>0$

$(b-a)(b+a-1)>0 \;\Big|: (b-a)$

если $(b-a)>0$, то биш $b>a$:

$b+a-1>0$

$b+a>1$ это ложь, так как $\underbrace{a<\frac{1}{2} \text{ и } b<\frac{1}{2}}_{a+b<1}$,

если $(b-a)<0$, то биш $b<a$

$b+a-1<0$

$b+a<1$ это правда так как $a+b<1$

уравнение 2) сказало нам, что $b<a$ и $a+b<1$

док-ть: $b^3-a^3>b-a$

док-во: $b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)>b-a \;\Big|:(b-a)$ $(b-a)<0$

$b^2+ab+a^2<1$

$b^2-1+ab+a^2<0$

$(b-1)(b+\frac{1}{a})+ab+a^2<0$

Место для скобы

Шифр 09053

$a + b < 1$

$b - 1 < -a$ означает

$(b-1)(b+1) + ab + a^2 < (-a)(b+1) + ab + a^2$ V

если $(-a)(b+1) + ab + a^2 < 0$, то и

$(b-1)(b+1) + ab + a^2 < 0$

$(-a)(b+1) + ab + a^2 < 0$

$-ab - a + ab + a^2 < 0$

$a^2 - a < 0$

$a(a-1) < 0 \mid : a \quad a > 0$

$(a-1) < 0$

$a < 1$ это правда, так как $a < \frac{1}{2}$, значит

$b^3 - a^3 > b - a$ это тоже правда

75

3. Дано: три ~~сл~~ бруска: 1. $\boxed{3C}$ m_1G — масса золота 1-го бруска, m_1S — масса серебра 1-го бруска.

2. $\boxed{3C}$ m_2G — масса золота 2-го бруска, m_2S — масса серебра 2-го бруска.

3. $\boxed{C}$ m_3 — масса 3-го бруска

$$30\% = \frac{(m_1G + m_2G) \cdot 100\%}{m_1G + m_1S + m_2G + m_2S}$$ V

$$26\% = \frac{m_1G \cdot 100\%}{m_1G + m_1S + m_3} = \frac{m_2G \cdot 100\%}{m_2G + m_2S + m_3}$$ V

$m_G = m_1G + m_2G$

$m_S = m_1S + m_2S$

Найти: $\frac{m_1G + m_2G}{m_1G + m_1S + m_2G + m_2S + m_3}$ — ?

Место для скобы

Шифр 09053

Решение: 1) $30\% = \dfrac{(m_{1G} + m_{2G}) \cdot 100\%}{m_{1G} + m_{1S} + m_{2G} + m_{2S}}$

$0{,}3 = \dfrac{m_G}{m_G + m_S} \quad \Big| \cdot 10$

$3m_G + 3m_S = 10m_G$

$m_S = \dfrac{7}{3} m_G$

2) $20\% = \dfrac{m_{1G} \cdot 100\%}{m_G + m_{1S} + m_3} = \dfrac{m_{2G} \cdot 100\%}{m_{2G} + m_{2S} + m_3}$

$\left[\begin{array}{l} 10m_G = 2(m_{1G} + m_S + m_3) \\ 10m_{2G} = 2(m_{2G} + m_{2S} + m_3) \end{array}\right.$ суммируем

~~20m~~

$10m_G = 2(m_G + m_S + 2m_3) \quad \Big| : 2$

$4m_G = m_S + 2m_3$

$m_3 = 2m_G - \dfrac{m_S}{2}$

3) $\dfrac{(m_{1G} + m_{2G}) \cdot 100\%}{m_{1G} + m_{1S} + m_{2G} + m_{2S} + m_3} = \dfrac{(m_G) \cdot 100\%}{m_G + m_S + m_3} = \dfrac{m_G \cdot 100\%}{m_G + m_S + 2m_G - \frac{m_S}{2}} =$

$= \dfrac{m_G \cdot 100\%}{3m_G + \frac{m_S}{2}} = \dfrac{m_G \cdot 100\%}{3m_G + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} m_G} = \dfrac{100\%}{3 + \frac{7}{6}} = \dfrac{100\%}{\frac{18+7}{6}} = \dfrac{6 \cdot 100\%}{25} =$

$= 24\%$

Отв: 24%

10

Место для скобы

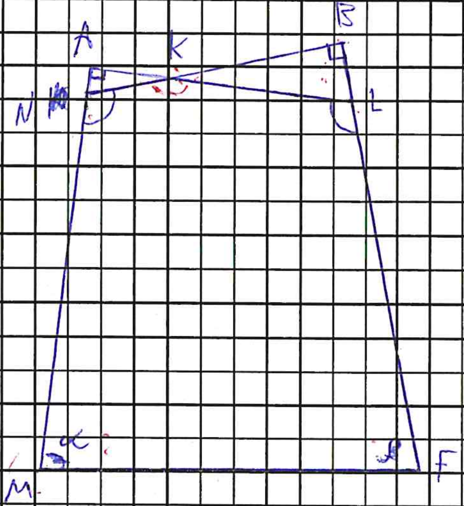
Шифр 09053

5. Дано: выпуклый пятиугольник, $MK \perp KL$, $NK \perp LF$,
$MN = NF = LF$

Док-ть: $NK + KL < 1$

Док-во: 1) пусть: $\angle NMF = \alpha$ $\angle MFL = \beta$

A — точка пересечения MN и LK



$\angle NAK = 90°$, т.к. $MN \perp NK$

B — точка пересечения FL и NK

$\angle KBL = 90°$, т.к. $FL \perp NK$

$\angle MNK = 360° - \angle KBL - \alpha - \beta =$
$= 270° - \alpha - \beta$

$\angle FLK = 360° - \angle NAK - \alpha - \beta =$
$= 270° - \alpha - \beta$

2) $\angle NKL = 540° - \alpha - \beta - \angle MNK - \angle FLK =$
$= 540° - \alpha - \beta - (270° - \alpha - \beta) - (270° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$

3) чтобы пятиугольник оставался выпуклым, все углы должны ~~быт~~ быть $< 180°$

$\angle MNK = 270° - \alpha - \beta < 180°$

$\alpha + \beta > 90°$

$\angle NKL = \alpha + \beta < 180°$

если $\alpha + \beta = 180°$ и $\alpha = \beta$, то $NK + KL = 1$, но $\alpha + \beta < 180°$

а значит $NK + KL < 1$.

2

Место для скобы

Шифр

2. $t^4-2\sqrt{13}\,t^2+t+13-\sqrt{13}=0$

$t^4-2\sqrt{13}\,t^2+13+t-\sqrt{13}=0$

$(t^2-\sqrt{13})^2+t-\sqrt{13}=0$

$\left((t-\sqrt[4]{13})(t+\sqrt[4]{13})\right)^2+t-\sqrt{13}=0$

нет

$t^4-\sqrt{13}\,t^2+13-\sqrt{13}\,t^2+t-\sqrt{13}=0$

$\frac{t^6+(\sqrt{13})^3}{t^2+\sqrt{13}}-\sqrt{13}\left(t^2+\frac{t}{\sqrt{13}}-1\right)=0$ V

нет.

$t^4-2\sqrt{13}\,t^2+t^2+13-\sqrt{13}=0$ $+t$

если бы t была во 2-й степени

$(t^2-\sqrt{13})^2+t^2-\sqrt{13}=0$ Слагаемое в условии!

$(t^2-\sqrt{13})(t^2-\sqrt{13}+1)=0$

$t^2=\sqrt{13}$ $\quad t^2=\sqrt{13}-1$ 0Б

Отв: $t=-\sqrt[4]{13};\ \sqrt[4]{13};\ -\sqrt{\sqrt{13}-1};\ \sqrt{\sqrt{13}-1};$

если поменять чуток условие

Место для скобы

Шифр

1. $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$

$a = 3^{2023}$

$b = 5^{1012}$

$a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{3^{6069} + 5^{3036}}{3^{2023} + 5^{1012}} = \frac{\text{нечет} + \text{нечет}}{\text{нечет} + \text{нечет}}$

$\cancel{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{\text{чёт}}{\text{чёт}}$

$a^2 - 2ab + b^2 + ab = (a-b)^2 + ab = (3^{2023} - 5^{1012})^2 + 3^{2023} \cdot 5^{1012}$

$= \frac{(3^2)^{1012}}{3} \cdot 5^{1012} = \frac{(9 \cdot 5)^{1012}}{3} = \frac{45^{1012}}{3}$

0

0б

6 страница