

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
21		Емельянов	Емел
Шифр			043003

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \Sigma \\ \hline 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 21 \end{array}$$

1) $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$
 Минимальное выражение положительного числа 0?
 тогда пусть
 $9+c-a=0$
 $c=a-9$ подставим $(7+a-b)^2 + (2+b-a+9)^2 = (2+a-b)^2 + (11+b-a)^2$
 $-a)^2$ предположим $11+b-a=0$
 $b=a-11$, тогда $(7+a-a+11)^2 = 18^2$
 Ответ: 324.

2) $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ - это уравнение имеет корни x_1, x_2, x_3, x_4

$P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$

$P(x_1) = x_1^2 \cdot Q(x_1) = -x_1 + 506$, $Q(x_1) = 0$, тогда

$P(x_1) = -x_1 + 506$, аналогично

$P(x_2) = -x_2 + 506$

$P(x_3) = -x_3 + 506$

$P(x_4) = -x_4 + 506$

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 506 \cdot 4 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ по теореме Виета.

тогда $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 2025$

3) $x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 4}{18} = 0$

$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 4}{18}$

Рассмотрим левую часть уравнения

$f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \sqrt{x^2+1} = 6 > 0$

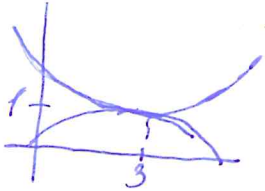
$f(t) = t^2 - 6t + 11$

Найдем минимальное значение $f(t)$, - это вершина параболы.

$$t_6 = 3 f(3) = 9 - 18 + 10 = 1$$

040208

Значит $x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11$ - наименьшее значение равно 1.
 Правая часть $-1 \leq \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 1$, т.е. наибольшее значение это 1, тогда если уравнение имеет решение, то правая и левая часть должны равняться единице.



$$\sqrt{x^2 + 1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

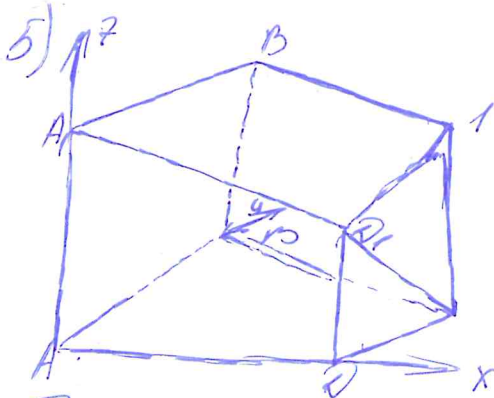
$$x^2 = 8$$

$$x^2 \pm \sqrt{2} +$$

$$x = -\sqrt{2}$$

$$\cos \frac{2-2-4}{18} \neq 1 \text{ Ответ: } x = \sqrt{2}?$$

поэтому ~~этот~~ ~~выбран~~ ~~ответ~~
 не обоснован



Пусть $\vec{n}_1 \perp \alpha, \vec{n}_2 \perp \beta \Leftrightarrow$

$$\cos(\alpha, \beta) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$$

В качестве $\vec{n}$ можно принять $\vec{A_1C_1} = \vec{AC} = (1; 1; 0)$

Пусть $\vec{n}_2$ им. координаты $(p; q; z)$

Т.к. $CD \parallel B$ то $\vec{n}_2 \perp \vec{CD}$

$$\vec{CD} = \vec{D} - \vec{C} = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0; -1; 1)$$

$$\vec{n}_2 \perp \vec{CD} \Rightarrow \vec{n}_2 \cdot \vec{CD} = 0 \Rightarrow q + z = 0, z = -q$$

Т.е. $\vec{n}_2$ имеет вид $(p; q; -q)$

Пусть $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{p+q}{\sqrt{2} \sqrt{p^2 + 2q^2}}$$

Б.О.О можно считать, что $q = 1$

Требуется найти $\min |\cos \varphi| = \min \frac{|p+1|}{\sqrt{2} \sqrt{p^2 + 2}} = a > 0$

Т.е. требуется найти наименьшее $a, a > 0$, при котором ур-е $\frac{(p+1)}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+2}} = a$ имеет решение p ногами?

$$(p+1)^2 = 2a^2(p^2+2)$$

$$2a^2 p^2 + 4a^2 = p^2 + 2p + 1$$

$$p^2(2a^2 - 1) - 2p + 4a^2 - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (2a^2 - 1)(4a^2 - 1)$$

$$5a^4 - 6a^2 + 1 - 1 = 0$$

$$2a^2(4a^2 - 3) \geq 0$$

$$+ \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad - \frac{1}{0} \quad - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow a > 0!$$

$$\min |\cos 4| = a \min = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$4) |x_1 - n + 1| |x_2 - n + 1| \dots |x_n - n + 1| \geq 1$$

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$$

$$\leftarrow \text{покажем? не обоснованы}$$

$$n^{x_i} = x_1 x_2 \dots x_n \text{ возведи в } n \text{ степени}$$

$$\frac{|x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}|^n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}$$

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\left(\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \right)^n \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1} \quad | \text{делаем } x_1 x_2 \dots x_n = 1$$

представим это $n x_i \geq 0$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n^x} \geq 1$$

$$|x_1 - n + 1| |x_2 - n + 1| \dots |x_n - n + 1| \geq 1$$

Таким образом доказано.