ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
23		Емельянова	Емел

Шифр [illegible]

1	2	3	4	5	Σ
1	7	4	6	5	23

№ 1

$(7+a-b)^2+(2+b-c)^2+(9+c-a)^2$

Минимальное выражение положительного числа "0"?, тогда пусть

$9+c-a=0$

$c=a-9$, подставим $(7+a-b)^2+(2+b-a+9)^2=$
$=(7+a-b)^2+(11+b-a)^2$

предположим $11+b-a=0$

$b=a-11$, тогда $(7+a-a+11)^2=182$

Ответ: 324

№ 2

$P(x)=x^6+x^5-4x^4+x^2-x+506$

$Q(x)=x^4+x^3-4x^2+1$

$x^4+x^3-4x^2+1=0$ - это уравнение имеет корни $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$P(x)=x^2(x^4+x^3-4x+1)-x+506$

$P(x_1)=x_1^2\cdot\varphi(x_1)-x_1+506$, $\varphi(x_1)=0$, тогда

$P(x_1)=-x_1+506$, аналогично. $P(x_3)=-x_3+506$

$P(x_2)=-x_2+506$ $P(x_4)=-x_4+506$

$P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=-x_1-x_2-x_3-x_4+506\cdot 4=$
$=-(x_1+x_2+x_3+x_4)+2024$

$x_1+x_2+x_3+x_4=-1$ по теореме Виета

тогда $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=2025$

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=0$$

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11=\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}$$

Рассмотрим левую часть уравнения

$$f(x)=x^2-6\sqrt{x^2+1}+11=\sqrt{x^2+1}^{\,2}-6\sqrt{x^2+1}+10$$

Введем замену $\sqrt{x^2+1}=t>0$

$$f(t)=t^2-6t+10$$

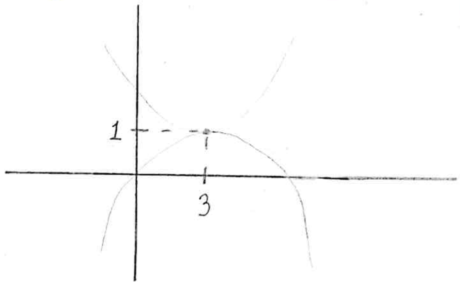
Найдем наименьшее значение $f(t)$ - это вершина параболы.

$t_в=3 \quad f(3)=9-18+10=1$

Значит $x^2-6\sqrt{x^2+1}+11$ - наименьшее значение равно 1

Правая часть $-1\le\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}\le 1$, т.е наибольшее значение это 1.,

тогда если уравнение имеет решение, то правая и левая часть должны равняться единице



$\sqrt{x^2+1}=3$

$x^2+1=9$

$x^2=8$

$x \neq \pm\sqrt{2}$? вычислено неверно

$x=\sqrt{2}$

$\cos\frac{2+2-4}{18}=\cos 0=1$

$x=-\sqrt{2}$

$\cos\frac{2-2-4}{18}\neq 1$

Ответ: $x=\sqrt{2}$ —

№ 4

Дано:

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа удовлетворяющие уравнению:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Необходимо доказать неравенство

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)\dots(x_n - n + 1) \geqslant 1$$

Решение: Рассмотрим замену:

$$x_i = n - 1 + a_i.$$

Тогда нам нужно доказать, что:

$$a_1 a_2 \dots a_n \geqslant 1$$

Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (AM-GM):

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$$

Так как по условию:

$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$, то можем записать:

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$$

Отсюда следует, что:

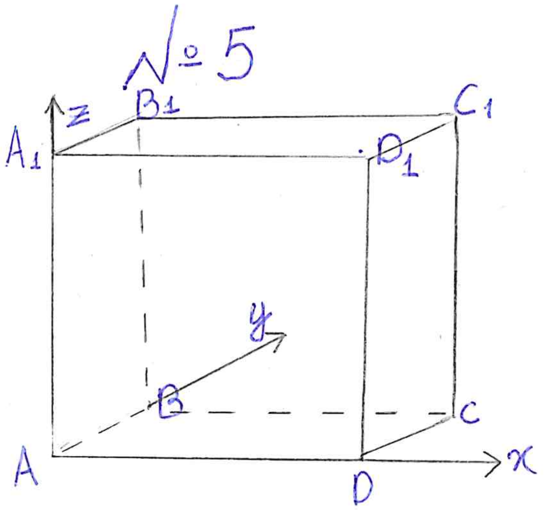
$x_1 x_2 \dots x_n \geqslant n^n$. как следует? обоснование недостаточное

Значит,

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)\dots(x_n - n + 1) \geqslant 1$$

Неравенство верно

№ 5



Пусть $\overrightarrow{n_1} \perp \alpha$, $\overline{n}_2 \perp \beta \Longleftrightarrow$

? $\cos(\alpha, \beta) \overset{?}{=} |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|$?

В качестве $\overrightarrow{n_1}$ можно принять $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC} = (1;1;0)$

Пусть $\overline{n}_2$ им. коор. (p, q, r)

т.к $CD \parallel \beta$, то $\overline{n}_2 \perp \overline{CD}$

$\overline{CD_1} = D_1 - C = (1,0,1) - (1,1,0) - (1,1,0) = (0;-1;1)$

$\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{CD_1} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} \cdot \overline{CD_1} = 0 \Rightarrow -q + r = 0$, $\underline{r = q}$

т.е $\overline{n}_2$ имеет вид $(p; q; q)$

Пусть $(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) = \varphi$

$\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{n_1}; \overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \dfrac{p+q}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2q^2}}$

почему? ?

Б.О.О ? можно считать, что $q = 1$ как обосновать

Требуется найти $\min|\cos\varphi| = \min \dfrac{|p+1|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2}} = a > 0$?

т.е требуется найти наименьшее a, $a > 0$, при котором уравнен. $\dfrac{|p+1|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2}} = a$ имеет решение p

$(p+1)^n = 2a^2(p^2+2)$

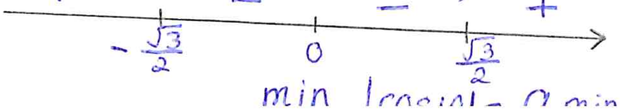
$2a^2p^2 + 4a^2 = p^2 + 2p + 1$

$p^2(2a^2-1) - 2p + 4a^2 - 1 = 0$

$\dfrac{D}{4} = 1 - (2a^2-1)(4a^2-1)$

$8a^4 - 6a^2 + 1 - 1 = 0$

$2a^2(4a^2-3) \geq 0$ $\quad a > 0$!



$\min|\cos\varphi| = a_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{}$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{}$