место для скобы

Шифр 09146

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	20.03.24	Хмелёва Г.Е	[подпись]

Задание 2.

по условию $0<x<\frac{1}{2}$, $0<y<\frac{1}{2}$. Рассмотрим

$y^3-x^3>y-x$

$-x^3+y^3>-x+y$

$-(x^3-y^3)>-(x-y)\ |:-1$

$(x^3-y^3)<x-y$

$(x^3-y^3)-x+y<0$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)<0$

$(x-y)(x^2+xy+y^2-1)<0$

$\Rightarrow$ 1. $x-y>0 \Rightarrow x>y$; $x^2+xy+y^2-1<0 \Rightarrow x^2+xy+y^2<1$

2. $x-y<0 \Rightarrow x<y$; $x^2+xy+y^2-1>0 \Rightarrow x^2+xy+y^2>1$

$\Rightarrow$ пусть $x=\frac{1}{3}$; $y=\frac{1}{4}$, где $y<x$, вставим в

$-x^2+y^2>y-x \Rightarrow \frac{1}{16}-\frac{1}{9}>\frac{1}{4}-\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{7}{126}>-\frac{1}{12}$

$\Rightarrow x>y$ и условие 2 неверно. $\frac{7}{126}<\frac{1}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ условие верно.

Рассмотрим: $y^2-x^2>y-x$

$(y-x)(y+x)-y+x>0$

$(y-x)(y+x)-(y-x)>0$

$(y-x)(y+x-1)>0$

5б

$\Rightarrow y<x \quad y+x>1$

Т.к. промежуток чисел x и y от $(0;\frac{1}{2}) \Rightarrow$ при возведение в степень числа обязательно становится меньше $\Rightarrow$ при $y^2-x^2<0$ и $y-x<0$ неравенство $y^2-x^2>y-x$ удовлетворяет $\Rightarrow y^3-x^3<0$ и $y-x<0 \Rightarrow$ тоже удовлетворяет.

Место для скобы

Шифр 09146

Задание 5.

Дано:

$\triangle MNK$ - равност.

$S_{\triangle MNK} = 1$

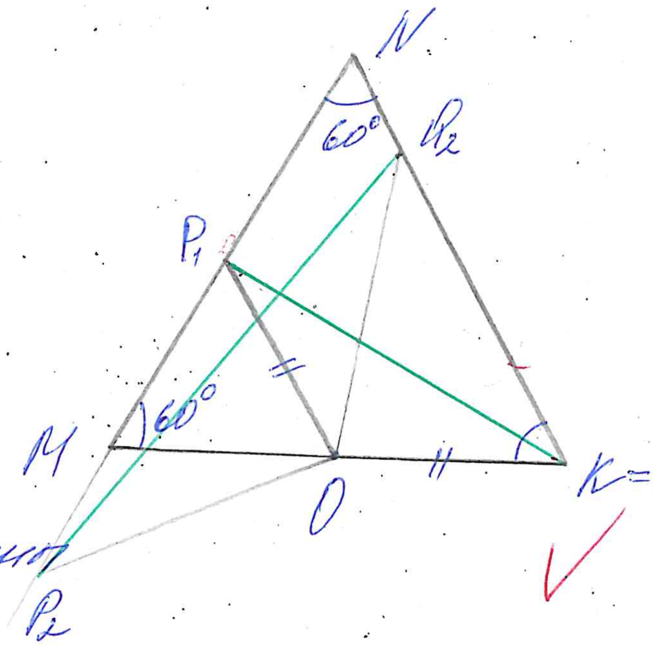
$P \in MN$

$Q \in NK$

O - середина MK

$PO = OQ$; $PQ \parallel MK$

найти пределы длины PQ - ?



Решение:

по условию задачи $PQ \parallel MK \Rightarrow$ существует только один способ разместить точки P и Q в $\triangle MKN$, иначе PQ будет $\parallel MK \Rightarrow$ в случае, если точка K в точке Q, а MN середина MN условие выполняется. Рассмотрим $P_1Q_1 \Rightarrow$ т.к. $\triangle MKN$ - равносторонний, то $MN = NK = MK$ $\Rightarrow P_1Q_1$ - высота, медиана, биссектриса. $S_{\triangle MKN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\Rightarrow a^2 = \frac{4 \cdot S_{\triangle MKN}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4 \cdot S_{\triangle MKN}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \triangle MP_1Q_1$ - прямоугольный, $\angle P_1 = 90^\circ$ $\Rightarrow P_1Q_1 = \sqrt{MQ_1^2 - MP_1^2}$, где $MP_1 = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} : 2 =$ $\Rightarrow MP_1 = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow P_1Q_1 = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$. В других случаях, чтобы выполнялись все условия точки P или Q будут расположены за отрезками MN и NK, так например точки на чертеже P_2 и Q_2 $\Rightarrow$ если учитывать данных два условия, то пределы изменения длины PQ будут в от $\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ до $+\infty$.

4.5

Место для скобы

Шифр 09146

Задание 1.

Условие говорит нам о том, что есть число abcd и сумма чисел этого числа $a+b+c+d$ ⇒ найти минимальное число, которое получится при отношении abcd к $a+b+c+d$ ⇒ $\frac{abcd}{a+b+c+d}$

⇒ рассмотрим такие числа (произвольные): 9999, сумма 36 ⇒ $\frac{9999}{36} = \frac{1111}{4} = 288\frac{3}{4}$ — много. по наблюдениям стало ясно, что a должна быть равна 1, т.к. отношение необходимо минимальное само число должно быть меньше большим, далее рассмотрим сотню, по той же логике берем наименьшее — 0. ⇒ далее методом перебора подбираем последние две числа ⇒ рассмотрим число 1099, сумма чисел $1+9+9+0=19$ ⇒ $\frac{1099}{19} = 57\frac{16}{19}$

3б Не док-но!

Задание 4.

$\cos 2x + \cos^{2023}(2x) + 2024\cdot\cos^{2025}(2x) = \sin x + \sin^{2023}(x) + 2024\cdot\sin^{2025}(x)$

$(\cos 2x - \sin x) + (\cos^{2023}(2x) - \sin^{2023}(x)) + 2024(\cos^{2025}(2x) - \sin^{2025}(x)) = 0$

$a^n - b^n = (a^n - b^n)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots b^{n-1}) = 0$

$(\cos 2x - \sin x) + (\cos 2x - \sin x)(\cos^{2022}(2x) + \cos^{2023}(2x)\sin x + \cos^{2021}2x \sin^2 x + \sin^{2022} x) + 2024(\cos 2x - \sin x)\cdot$

$\cdot(\cos^{2024}(2x) + \cos^{2023}(2x)\sin x + \cos^{2022}2x \sin^2 x + \dots + \sin^{2020} x) = 0$

$(\cos 2x - \sin x)(1 + \cos^{2022}(2x) + \cos^{2021}(2x)\sin x + \sin^{2022} x\cdot\cos^{2020}(2x) + \sin^{2022} x + \sin^{2024} x) = 0$

$\cos 2x - \sin x = 0$

$1 - \sin^2 2x - \sin x = 0$

Место для скобы

Шифр 09146

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\sin x = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$

$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{4}{4} = 1$

Обратная замена

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = +(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k$

$x = +(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$?

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

4 б