

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
55		Корякеева	М
Шифр			042005

№1

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 2 & 0 & 0 & 15 \\ \hline \end{array}$$

Введем функцию трёх переменных и обозначим ее как S :

$$S = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

Найдем производную функции $S'(a)$:

$$\begin{aligned} S'(a) &= 2(7+a-b) \cdot (7+a-b)' + 0 + 2(9+c-a)(9+c-a)' = 2(7+a-b) \cdot 1 + 0 + 2(9+c-a)(-1) = \\ &= 14 + 2a - 2b - 18 - 2c + 2a = 4a - 2b - 2c - 4 \end{aligned}$$

Найдем производную функции $S'(b)$:

$$S'(b) = 2(7+a-b) \cdot (-1) + 2(2+b-c) \cdot 1 + 0 = -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 10$$

Найдем производную функции $S'(c)$:

$$S'(c) = 2(9+c-a) \cdot 1 + 2(2+b-c) \cdot (-1) + 0 = 18 + 2c - 2a - 4 - 2b + 2c = -2a - 2b + 4c + 14$$

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 & (1) \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 & (2) \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 & (3) \end{cases}$$

Отнимем (1) от (2) и (2) от (3):

$$\begin{cases} 6a - 6b + 6 = 0 \\ 6b - 6c - 24 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6b = 6a + 6 \\ 6b = 6c + 24 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a + 1 \\ b = c + 4 \end{cases}$$

Подставим значения переменных в выражение:

$$\begin{cases} a = b - 1 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = b - 4 \end{cases}$$

$$(7-1-0)^2 + (2+0+4)^2 + (9-4+1)^2 = 36 + 36 + 36 = 108$$

Ответ: 108

Или: $7-1-0=6$, $2+0+4=6$, $9-4+1=6$. Тогда $6^2+6^2+6^2=108$.

№2 $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = ?$

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

Посмотрев на два многочлена заметим, что $P(x) = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$?

$Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$

наоборот

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = x_1^2 + 506 - x_2^2 + 506 - x_3^2 + 506 - x_4^2 + 506 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2024$

$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = x^4 - x^3(x_1+x_2+x_3+x_4) + x^2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) - x(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4 =$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$= x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) = -(-1) + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

№3

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right) = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right)$$

Чтобы равенство выполнялось нулю чтобы $-1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \leq 1$, т.к.

$1 \leq \cos \alpha \leq 1$. Введем функцию $f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11$ $\sqrt{x^2 + 1} = t$

$$f(t) = t^2 - 1 - 6t + 11 =$$

$$= t^2 - 6t + 10$$

Найдем вершину параболы:

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \quad y_0 = 9 - 18 + 10 = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 10 = 0$$

$$t^2 - 6t + 10 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$t = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Чтобы понять подходят ли корни или нет, подставим их в $\cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right)$.

$$x = \sqrt{8} \quad \cos\left(\frac{(\sqrt{8})^2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{18}\right) = \cos\frac{8}{18} \neq \cos 0 \text{ значит } \sqrt{8} \text{ наш не подходит}$$

$$x = -\sqrt{8} \quad \cos\left(\frac{(-\sqrt{8})^2 + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{8}) - 4}{18}\right) = \cos\frac{0}{18} = \cos 0 = 1 \text{ значит } -\sqrt{8} \text{ наш подходит}$$

Ответ: $-\sqrt{8}$

