

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2.

предположим, что $a \geq 1, b \geq 2$ и $c \geq 3$.
предположим, что $a = 1, b = 2, c = 3$.

тогда $a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \quad 14 < 21$

$a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6, \quad 6 < 7.$

в этом случае оба неравенства неверны.
увеличим одно из чисел: $a = 2, b = 2, c = 3$.
тогда $2^2 + 2^2 + 3^2 = 17, \quad 17 < 21$

$a + b + c = 2 + 2 + 3 = 7.$

в этом случае только неравенство $a + b + c \geq 7$ верно.
минимальные значения чисел a, b, c при которых
будет выполняться неравенство среднее.

$a = 3, b = 2, c = 3.$

в этом случае $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 + 3^2 = 22, \quad 22 \geq 21$

$a + b + c = 3 + 2 + 3 = 8, \quad 8 \geq 7$

В дальнейшем при увеличении любого из чисел (a, b, c)
будут выполняться оба неравенства: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$
и $a + b + c \geq 7$.

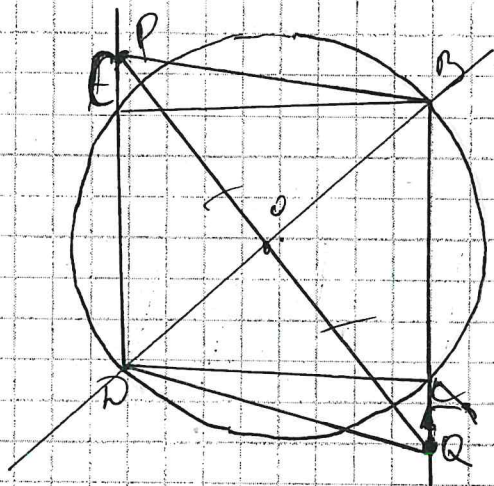
$\Rightarrow$ если неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ верно, то
неравенство $a + b + c \geq 7$ тоже верно.

Это и требовалось доказать.

такие случаи!

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задание 5.



Дано: $ABCD$ - четырехугольник

$$DP = DA \quad BQ = BC$$

Док-ть: $PO = OQ$

Док-во: $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$, $\angle CBA + \angle CDA = 180^\circ$, т.к. вокруг четырехугольника можно вписать окружность в том случае, если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° .

Проведем отрезки QD и BP , рассмотрим четырехугольник $BQDP$: $DP = BQ$, $BP = QD$, $DP \parallel BQ$ и $BP \parallel QD \Rightarrow BQDP$ - параллелограмм. PQ и DB - диагонали параллелограмма, точка O - точка пересечения диагоналей. $\Rightarrow PO = OQ$ (по св-ву диагоналей в параллелограмме).

Что и требовалось доказать.

05

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
14	19.03	Хмелев	
Шифр			

1/2 | 3/4 | 5/Σ
5 | 7 | 2 | 145

Задача 3.

Хмелев

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^4 - 1) + (2n^3 - 2n)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1 + 2n)}{n^4} = \frac{(n - 1)(n + 1)(n + 1)^2}{n^4}$$

Получим равенство $a_n = \frac{(n - 1)(n + 1)^3}{n^4}$ ✓

при $n = 2$ $a_2 = \frac{(2 - 1)(2 + 1)^3}{2^4} = \frac{3^3}{2^4}$

при $n = 3$ $a_3 = \frac{(3 - 1)(3 + 1)^3}{3^4} = \frac{2 \cdot 4^3}{3^4}$

при $n = 4$ $a_4 = \frac{(4 - 1)(4 + 1)^3}{4^4} = \frac{3 \cdot 5^3}{4^4}$

можно заметить закономерность:

$$\frac{3^3}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdot \frac{4 \cdot 6^3}{5^4} \cdot \frac{5 \cdot 7^3}{6^4} \cdot \dots \cdot \frac{98 \cdot 100^3}{99^4}$$

Эти множители можно сократить и
после сокращения получаем ответ $\frac{125000}{99}$ ✓

Задача 1.

$$x, y > 0, \quad x > y \Rightarrow x - y > 0$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

$$(x-y)^2 + 2xy = \frac{10}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{10}{3}xy - \frac{3}{2}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{13}{6}xy$$

м.к. $x-y > 0$, то $x-y = \frac{\sqrt{13}}{3}\sqrt{xy}$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy -$$

$$(x+y)^2 = \frac{10}{3}xy + \frac{3}{2}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

м.к. $x, y > 0$, то $x+y > 0 \Rightarrow x+y = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{xy}$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{xy}}{\frac{\sqrt{13}}{3}\sqrt{xy}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

Ответ: 2.

Задача 4

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

по т. Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Преобразуем $x^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1^2 x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$ ✓

Воспользуемся равенством

$$\left(1 - p^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2}\right)\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2p^2}\right) = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{p^2} = p^4 + 2p^2 \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^4} - \frac{1}{p^2} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$
 ✓

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} - \sqrt{2} > 0$$

$$\frac{2p^8 - 2\sqrt{2}p^4 + 1}{2p^8} \geq 0$$

$$\frac{(\sqrt{2}p^4 - 1)^2}{2p^8} \geq 0$$

— исходя из этого неравенства можно сделать вывод, что при $p \neq 0$ неравенство верно.

20