

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
22		Коржикова	
Шифр			042015

N1 $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$

$f = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$

$f'_a = 2(7+a-b) + 0 - 2(9+c-a) = 14 + 2a - 2b - 18 - 2c + 2a = 4a - 2b - 2c - 4 = 0$

$f'_b = -2(7+a-b) + 2(2+b-c) + 0 = -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 10 = 0$

$f'_c = 0 - 2(2+b-c) + 2(9+c-a) = -4 - 2b + 2c + 18 + 2c - 2a = -2a - 2b + 4c + 14 = 0$

Нужно найти минимальное значение $\Rightarrow$ минимальное значение будет там, где производная равна 0

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 & (1) \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 & (2) \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 & (3) \end{cases}$$

Отнимем от (1) третье

$$6b - 6c - 24 = 0 \quad / : 6$$

$$b - c - 4 = 0 \Rightarrow b = c + 4$$

подставим полученное значение в (2):

$4a - 2c - 8 - 2c - 4 = 0$

$4a - 4c - 12 = 0 \quad / : 4$

$a - c - 3 = 0 \Rightarrow a = c + 3$

$$\begin{cases} a = c + 3 \\ b = c + 4 \\ c - \text{любое} \end{cases}$$

1	2	3	4	5	Σ
5	7	7	0	3	22

Подставим значения в функцию f

верно или нет?

$f = (7+c+3-c-4)^2 + (2+c+4-c)^2 + (9+c-c-3)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$

Ответ: 108

N2

$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

$Q(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + x$

$P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$

$P(x) = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = x_1^2 \cdot Q(x_1) - x_1 + 506 + x_2^2 \cdot Q(x_2) - x_2 + 506 +$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$+ X_3^3 \cdot Q(X_3) - X_3 + 506 + X_4^3 \cdot Q(X_4) - X_4 + 506$$

X_1, X_2, X_3, X_4 являются корнями $Q(x)$, значит $Q(X_1) = Q(X_2) = Q(X_3) = Q(X_4) = 0$

$$P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = -X_1 + 506 - X_2 + 506 - X_3 + 506 - X_4 + 506 = \\ = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 2024$$

$$Q(x) = (x - X_1)(x - X_2)(x - X_3)(x - X_4) = x^4 - x^3(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \\ + x^2(X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4) + x(X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + \\ + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4) - X_1X_2X_3X_4$$

Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:

$$Q(x) = x^4 + 1x^3 - 4x^2 + 1$$

$$Q(x) = x^4 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \cdot x^3 + x^2(X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + \\ + X_3X_4) + x(X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4) - X_1X_2X_3X_4$$

$$Q(x) = Q(x) \Rightarrow 1 = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) - \text{коэффициенты равны перед } x^3$$

$$P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = 2024 + 1 = 2025$$

Ответ: 2025

N 3

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

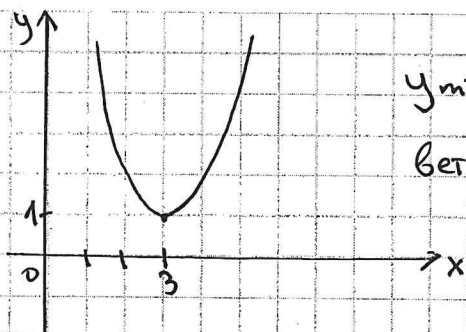
$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \frac{\cos x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$

$$f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} \quad \text{Пусть } \sqrt{x^2 + 1} = z, \text{ тогда } x^2 + 1 = z^2$$

$$f(x) = z^2 - 6z + 10 \quad (\text{парабола, ветви вверх})$$

$$x_0 = \frac{6}{2} = 3 \quad y_0 = 9 - 18 + 10 = 1, \quad M(3; 1) - \text{вершина параболы}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			



$y_{\min} = 1$ т.к. $M(3; 1)$ вершина параболы, у которой ветви вверх, поэтому все значения данной функции лежат выше

$$t^2 - 6t + 10 = 1$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t - 3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3 \quad \sqrt{x^2 + 1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

$$1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 1 \text{ — единственный случай когда это возможно}$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases} \text{ подставим значение в выражение}$$

$$\frac{\cos \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{18}}{18} = \cos \left(\frac{8}{18} \right) \neq 1$$

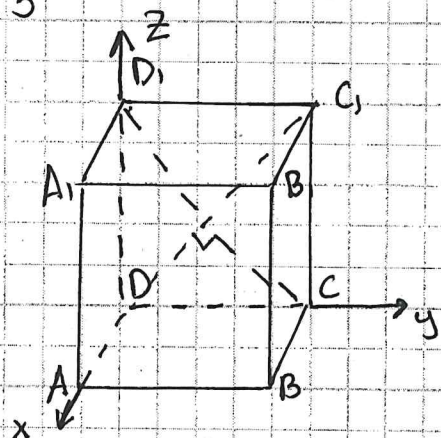
$$\frac{\cos \frac{\sqrt{2}(-\sqrt{8}) - 4}{18}}{18} = \cos 0 = 1 \Rightarrow -\sqrt{8} \text{ — решение}$$

Ответ: $-\sqrt{8}$

X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

N 5



дано: AB_1CDA_1, B, C, D_1 - куб

$\alpha \perp A_1C_1$; $\beta \parallel CD_1$

$\angle \beta$ - ?

Решение:

1) Введем систему координат. Пусть куб AB_1CDA_1, B, C, D_1 с ребром 1

$A_1(1; 0; 1)$

$C_1(0; 1; 1)$

$\vec{A_1C_1} \{-1; 1; 0\}$

$C(0; 1; 0)$

$D_1(0; 0; 1)$

$\vec{CD_1} \{0; -1; 1\}$

$\beta \parallel CD_1$

$CD_1 \perp AD$

$\Rightarrow \beta \perp AD$

$\vec{AD}$ - вектор нормали к β

$A(1; 0; 0)$

$D(0; 0; 0)$

$\vec{AD} \{-1; 0; 0\}$

$\vec{A_1C_1}$ - вектор нормали к α

Найдем угол между нормальными, перемножив скалярно

$$\vec{A_1C_1} \cdot \vec{AD} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{A_1C_1} \cdot \vec{AD} = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2} \cdot \cos \varphi$$

$$1 = \sqrt{2} \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Угол между нормальными равен углу между плоскостями $\Rightarrow$

угол между α и β равен 45°

Ответ: 45°