

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата  | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|------------|-------|--------------------|---------------------|
| 11         | 25.03 | Коржиков Е.Е.      | И                   |

1 2 3 4 5 6  
0 5 0 2 4 11

№1

Поскольку  $x \cdot 1000 + y \cdot 100 + z \cdot 10 + w$   
 $x + y + z + w$  - мин  $\rightarrow x + y + z + w$  - макс,  
 а числитель мин.

мин знамен =  $1 + 1 + 1 + 1 = 4$

макс знамен =  $9999$

макс знамен =  $9 + 9 + 9 + 9 = 36$

мин числ =  $1111$

Очевидно, что макс числитель будет 3-значным -  
 для существования разницы мы должны оперировать числами в  
 диапазоне  $1111 - 1199$ , а мин числитель будет из 4-х цифр  
 в этом диапазоне  $(4 - 36)$ .  
 Кроме того, для существования разницы мы должны выбрать  
 наименьшее и самое большое число, мы должны выбрать  
 1 и 9 - самое маленькое и самое большое число, чтобы  
 увеличить знаменатель:  $1 + 1 + 9 + 9$  и оставить числитель:  
 $1199$   
 $20 \approx 59$   $20 \approx 60$  - минимум.

№2

Рассмотрим несколько случаев:

1)  $y = x \rightarrow y^2 - x^2 = y - x = 0$ , что не соотв. усл. ( $y^2 - x^2 > y - x$ )

2)  $y > x \rightarrow$  исходя из  $y^2 - x^2 > y - x$   
 $y(y - 1) - x(x - 1) > 0$   
 $(y - x)(y + x) > (y - x)$   
 $(y - x)(y + x - 1) > 0 \cdot \frac{1}{y - x}$  (так как  $y > x$ )  
 $(y + x - 1) > 0$   
 $y + x > 1$  - невозможно, так как  $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \end{cases}$   
 (по усл.)

Исходя из 1 и 2 случаев  $\rightarrow y < x$

$y^3 - x^3 > y - x$   
 $y(y^2 - 1) - x(x^2 - 1) > 0$



$$y(y-1)(y+1) - x(x-1)(x+1) > 0$$

Исходя из условия  $(y^2 - x^2) > y - x \Rightarrow y(y-1) > x(x-1) \Rightarrow$  наоборот  
заменяя обратным неравенство:

$$x(x-1)(y+1) - x(x-1)(x+1) > 0$$

$$x(x-1)(y+1) - x(x-1)(x+1) > 0$$

$$x(x-1)(y-x) > 0$$

$$x > 0$$

$$x-1 < 0$$

$$y-x < 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(y-x) > 0 \Rightarrow x(x-1)(y+1) - x(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(y-1)(y+1) - x(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow y^3 + x^3 > y - x$$

Усл:  $x \neq 0$  (по условию)  
 $x \neq 1$  (по условию)  
 $x \neq y$  (по условию)

$$\cos(2x) + \cos^{2025}(2x) + 2024 \cdot \cos^{1015}(2x) = \sin(x) + \sin^{1015}(x) + \sin^{2025}(x)$$

Заметим, что уравнение является симметричным

$$a + a^{2025} + 2024 \cdot a^{1015} = b + b^{1015} + 2024 \cdot b^{2025}$$

Заметим, что степени всех слагаемых - нечетные

$\Rightarrow a = b$  Или все же рассмотреть!

$$\cos(2x) = \sin(x)$$

$$\cos x - \sin^2 x = \sin(x)$$

$$1 - 2\sin^2 x = \sin(x)$$

$$t = \sin x - \text{замена}$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = -1$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

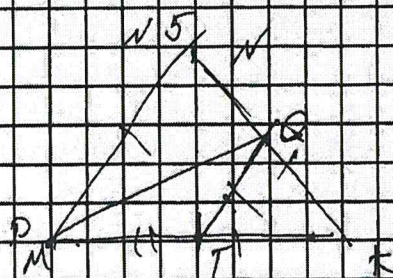
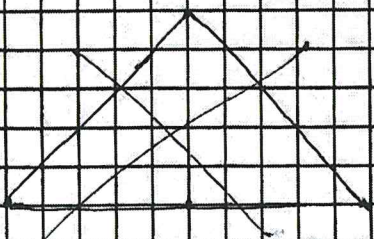
$$t = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$



$$\text{Дел: } MN = MK = NK$$

$$TM = TK$$

$$PT = QT$$



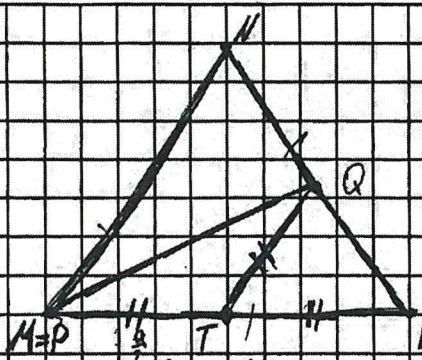


Рис 1

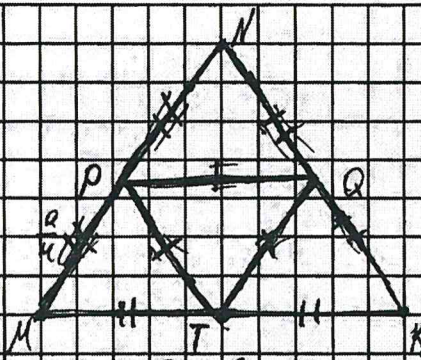


Рис 2

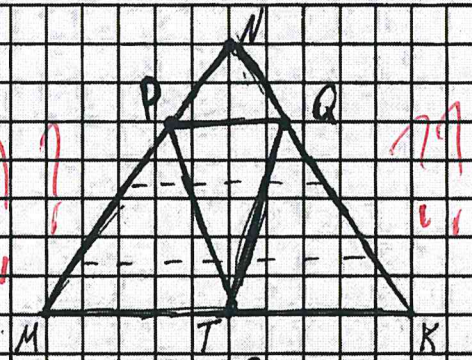


Рис 3

Рассмотрим 2 случая

- 1) PQ находится ниже средней линии (Рис 1)  
В этом случае максим  $MT = \frac{MK}{2}$ . Пусть  $AK = MN = NK = a \rightarrow$   
 $PT = \frac{a}{2}$  - макс. раст.

Рассмотрим  $\triangle PTA$ , который будет поворачиваться вокруг  
точки T. В нач. положении точка P = точке M  $\rightarrow PT = \frac{a}{2} = QT$ .

$$PT \sim TK$$

$$PT = QT \rightarrow Q - \text{сер. } MK \rightarrow PQ - \text{выс.} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle MNK - \text{р/с.} \quad S_{\triangle MNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{4} \rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$PQ = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - \text{первое значение}$$

Далее вращаем  $\triangle PQT$  вокруг точки T пока PQ не станет  
 $\parallel MK$  (Рис 2), что очевидно произойдет при  $PM = \frac{a}{2}$   
в этом случае PQ = средняя линия в трапеции с основа-  
ниями MK и сред. линией  $\triangle MNK$

$$PQ = \frac{\frac{a}{2} + a}{2} = \frac{\frac{3a}{2}}{2} = \frac{3a}{4} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.3, \text{ однако в}$$

этом случае  $PQ \parallel MK \rightarrow$  не выполняется

Ответ:  $\left[ \frac{\sqrt{3}}{4}; \sqrt{3} \right]$

- 2) PQ находится выше средней линии (Рис 3)  $\rightarrow$  в этом  
случае вращения не удастся, т.к. PQ будет  $> MT \rightarrow$   
пересечет MN, а не попадет на нее  $\rightarrow$  единственная воз-  
можность удержать PT и TQ - Q выше средней линии.  
 $PT = QT$  и лежат на сторонах р/с треугольника  $\rightarrow$   
PQ будет  $\parallel MK \rightarrow$  такого знач. дать не может.