Место для скобы

Шифр 09184

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
11	20.03.24	Хмылёва Т.Е	[signature]

№2.

1) Заметим, что $y \neq x$. Т.к. $y>0$ и $x>0 \Rightarrow y^2>0$ и $x^2>0 \Rightarrow$ если $x=y$, то $y^2-x^2=y-x=0$, что противоречит условию (2)

2) $y^2-x^2=(y-x)(x+y)$

3) $x+y<1$ т.к. $y_{max}<\frac{1}{2}$ и $x_{max}<\frac{1}{2}$

4) Заметим, что $y-x<0$; т.к. $x+y<0$, то $|y-x|\cdot(x+y)<|y-x| \Rightarrow$ чтобы соблюдалось усл. (2) $y-x<0$

5) $y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+x^2)$

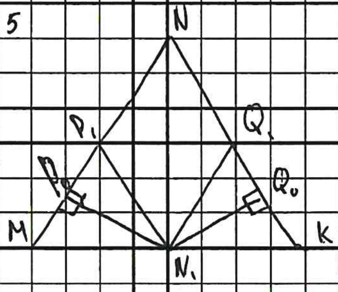
т.к. $y<\frac{1}{2}$ и $x<\frac{1}{2}$ то $xy<\frac{1}{4}$ $y^2<\frac{1}{4}$ и $x^2<\frac{1}{4} \Rightarrow$

$y^2+xy+x^2<1 \Rightarrow (6)$

6) $\underbrace{(y-x)}_{<0}\cdot\underbrace{(y^2+x^2+xy)}_{<1} > y-x \Rightarrow y^3-x^3>y-x$ ч.т.д.

7б

№5



$P\in MN$ $Q\in KN$ $NK=MN=MK$

N_1 - середина MK и высота NN_1 $\triangle MN_1N=\triangle NN_1K$

1) Заметим, что т.к. отрезок PQ не параллелен MK, то $\angle MPN_1 \neq \angle N_1QK \Rightarrow$ отрезки PN_1 и QN_1 не могут быть высотами в $\triangle NN_1K$ и $\triangle NN_1M$.

Место для скобы

Шифр 09184

⇒ $P \neq P_0$ (отмеченному на рисунке) и $Q \neq Q_0$

② Пусть $N_1K = a = MN_1$. Отметим на рисунке точки Q_1 и P_1 ($N_1Q_1 = a$ и $N_1P_1 = a$) ⇒ это максимально удалённые возможные ~~длины~~ точки Q и P т.к. для того чтобы точки Q и P были равноудалены от точки N_1 и $\angle MPN_1 \neq \angle KQN_1$, точки P и Q должны быть по разные стороны от отрезка P_0Q_0 (то есть: при $Q \in (Q_0 K]$ $P \in (P_0; P_1)$ и когда $Q \in (Q_0; Q_1]$ $P \in (P_0; M]$.

③. Т.к. $P_1N_1 = N_1K$ и $Q_1N_1 = N_1M$ — ~~они от~~ наибольшие возможные. ⇒
$Q = K$ $P = M$

$P_1K = QM$ — наибольшая возможная длина PQ

Рассмотрим $\triangle MNK$. ($N_1K = a$ $MK = 2a$)

NN_1 — высота $NN_1 = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ (по т. Пифагора)

$S_\triangle = 1 = \frac{NN_1 \cdot 2a}{2} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ✓

Рассмотрим $\triangle NN_1K$:

$S_\triangle NN_1K = \frac{NN_1 \cdot N_1K}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ $S_\triangle NN_1K = \frac{N_1Q_0 \cdot NK}{2} = a \cdot NQ_0$

$\Rightarrow NQ_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ ✓

Заметим что $\triangle MQ_1K \sim \triangle N_1Q_0K$.

$\Rightarrow \frac{MQ_1}{N_1Q_0} = \frac{MK}{N_1K} \Rightarrow MQ_1 = 2N_1Q_0 = \sqrt{3}$. $\sqrt[4]{3}$

④ Наименьшей (не включительно) длиной отрезка PQ будет P_0Q_0.

Рассмотрим $\triangle N_1Q_1K$

$N_1K = N_1Q_1 = Q_1K \Rightarrow \triangle N_1Q_1K$ — равносторонний $\Rightarrow Q_1Q_0 = Q_0K = \frac{1}{2}Q_1K = \frac{1}{4}NK$

Рассмотрим $\triangle NP_0Q_0$: $\triangle NQ_0P_0 \sim \triangle NMK$ ($P_0Q_0 \parallel MK$)

Место для скобы

Шифр 09184

$$\frac{NK}{NQ_0} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{MK}{P_0Q_0} = \frac{4}{3} \Rightarrow P_0Q_0 = \frac{4}{3\sqrt[3]{3}}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}}; -\sqrt{3}\right)$

0

$\sqrt{3}$

4 б