

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
12		Корсаков	И
Шифр			042360

№5.

Дано:

$$S_{MNK} = 81$$

$$\angle LMN = 30^\circ$$

ML - биссектриса

Найти:

$$MN + MK = ?$$

Решение:

1) Рассмотрим точки M, N, L, K
они лежат на одной окружности.
MNKL - вписанный.

Сумма противоположных углов равна 180°

2) Пусть $\angle NML = 30^\circ$ т.к. ML биссектриса $\angle NML$,
то угол $\angle KML = 30^\circ \Rightarrow \angle NMK = 60^\circ$

3) Найдем угол $\angle NLK = 180^\circ - \angle NMK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
($\angle NMK$ противоположный угол $\angle NLK$).

4) Площадь четырехугольника MNKL можно
разделить на площадь двух треугольников: MNL и MKL

$$S_{MNL} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot ML \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot MN \cdot ML$$

$$S_{MKL} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot ML \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot MK \cdot ML$$

$$S_{MNKL} = S_{MNL} + S_{MKL} = \frac{1}{4} \cdot MN \cdot ML + \frac{1}{4} \cdot MK \cdot ML = \frac{1}{4} \cdot ML (MN + MK)$$

$$81 = \frac{1}{4} \cdot ML \cdot (MN + MK)$$

По теореме синусов в треугольнике MNL:

$$\frac{MN}{\sin(\angle NLM)} = \frac{ML}{\sin(\angle MNL)}$$

В треугольнике (MKL)

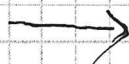
$$\frac{MK}{\sin \angle MKL} = \frac{ML}{\sin \angle MKL}$$

$$\angle MNL + \angle MKL = 60^\circ$$

Пусть: $\angle MNL = \alpha$ $\angle MKL = 60^\circ - \alpha$

$$MN = \frac{ML \cdot \sin(\angle NLM)}{\sin 30^\circ}$$

$$MK = \frac{ML \cdot \sin(\angle MKL)}{\sin 30^\circ}$$



Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

042360

$$81 = \frac{1}{4} \cdot ML \cdot \left(\frac{ML \cdot \sin(NLM)}{\sin 80^\circ} + \frac{ML \cdot \sin(NKL)}{\sin 30^\circ} \right)$$

$$81 = \frac{1}{4} \cdot ML \cdot (MN + MK)$$

$$324 = ML \cdot (MN + MK)$$

6) Нам известно что $\angle NMK = 60^\circ$

$$NK^2 = MN^2 + MK^2 - 2MN \cdot MK \cdot \cos 60^\circ \quad (\text{теорема косинусов})$$

$$NK^2 = MN^2 + MK^2 - MN \cdot MK$$

$$81 = \frac{1}{4} \cdot ML \cdot (MN + MK)$$

$$MN + MK = \frac{324}{ML}$$

$$\text{Ответ: } MN + MK = \frac{324}{ML}$$

??

+

№1.

$$(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2$$

Пусть:

$$x = 10 + a - b$$

$$y = 2 + b - c$$

$$z = 3 + c - a$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$x + y + z = (10 + a - b) + (2 + b - c) + (3 + c - a) = 10 + 2 + 3 + a - a + b - b + c - c = 15$$

По неравенству Буяковского в форме:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1)^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3 \geq (x + y + z)^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3 \geq 15^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 75$$

→

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Т.к. $x+y+z=15 \Rightarrow x=y=z=\frac{15}{3}=5$

$x=5; y=5; z=5$

$10+a-b=5 \Rightarrow a-b=-5$

$2+b-c=5 \Rightarrow b-c=3$

$3+c-a=5 \Rightarrow c-a=2$

$b-c+c-a=5$

$b-a=5$

Отсюда $x^2+y^2+z^2 \geq 75$

Ответ: ≥ 75

№4

$P(x) = x^6 + x^5 + 4x^4 + x^2 - x + 50$

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

1) Разделим $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком
 $P(x) = Q(x) \cdot R(x) + K(x)$ - остаток.

$P(x) = (x^2+1) \cdot Q(x) + 1 - x^3 + 4x^2 - 2x + 49$

$Q(x) = x^2 + 1$

$R(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 49$

т.к. x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x) \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$

Подставим корни x_i в выражение $P(x)$

$P(x_i) = Q(x_i) \cdot R(x_i) + K(x_i) = K(x_i)$

$K(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 49$

$\sum P(x_i) = \sum (-x_i^3 + 4x_i^2 - 2x_i + 49)$

$P(x_i) = -\sum x_i^3 + 4\sum x_i^2 - 2\sum x_i + 4 \cdot 49$

По формуле Виета:

$Q(x) = x^2 + x^3 - 4x^2 + 1$

$\sum x_i = -1$

$\sum x_i x_j = -4$

$x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$

$(\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 + 2 \cdot (-4)$

$1 = \sum x_i^2 - 8$

$\sum x_i^2 = 9$

$\sum x_i^3 = (-1)^2 - (-1) - 3 \cdot (-1) - (-4) + 30 = -13$

$\sum P(x_i) = 13 + 36 + 2 + 196 = 247$

Ответ: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 247$