

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
235	19.03.25	Генерин	
Шифр			918325

Задача 3.

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$

Тогда $a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^3 = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3$

$$a_n \cdot a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3$$

$$\Rightarrow a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{79} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{78}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{79}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^2 \dots$$

$$\dots \left(\frac{79}{78}\right)^2 \left(\frac{80}{79}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^2}{3^2} \cdot \frac{5^2}{4^2} \dots \frac{79^2}{78^2} \cdot \frac{80^3}{79^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{80^3}{79} = \frac{64000}{79}$$

Ответ: $\frac{64000}{79}$

Задача 4.

Пусть m_1, m_2 — изнач. масса в кардниках, n_1, n_2 — кол-во блоков, m — масса 1-го переломного блока, m' — масса 2-го переломного блока.

Тогда:

$$\begin{cases} \frac{m_1 - m}{n_1 - 1} = \frac{m_1}{n_1} + 3 \Rightarrow 3n_1^2 - 3n_1 = m_1 - n_2 m \\ \frac{m_2 + m}{n_2 + 1} = \frac{m_2}{n_2} + 3 \Rightarrow 3n_2^2 + 3n_2 = m n_2 - m_2 \\ \frac{m_1 - m - m'}{n_1 - 2} = 1,03 \frac{m_1}{n_1} \Rightarrow m_1 n_1 - m n_1 - m' n_1 = 1,03 m_1 n_1 - 2,06 m_1 \\ \frac{m_2 + m + m'}{n_2 + 2} = 1,03 \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow m_2 n_2 + m n_2 + m' n_2 = 1,03 m_2 n_2 + 2,06 m_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,03(m_1 + m_2) n_1 n_2 = 2,06 m_1 - 2,06 m_2$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

918325

Задача 1.

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy. \Rightarrow x^2 + y^2 - 2,5xy = 0. \quad | + 0,5xy \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0,5xy \Rightarrow (x-y)^2 = 0,5xy.$$

$(x-y)^2 = 0,5xy$. т.к. $x > y$, то их разность > 0 , а значит, что $x-y = \sqrt{0,5xy}$ (или имеем вариант $-\sqrt{0,5xy}$)

$$x^2 + y^2 - 2,5xy = 0 \quad | + 4,5xy \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4,5xy \Rightarrow (x+y)^2 = 4,5xy.$$

$(x+y)^2 = 4,5xy$, т.к. $x > 0$ и $y > 0$, то их сумма > 0 , а значит, что $x+y = \sqrt{4,5xy}$ (или имеем вариант $-\sqrt{4,5xy}$)

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{4,5xy}}{\sqrt{0,5xy}} = \frac{\sqrt{4,5} \sqrt{xy}}{\sqrt{0,5} \sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{4,5}}{\sqrt{0,5}} = \frac{\sqrt{4,5}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 2.

$$a^2 - a = a(a-1) \in \mathbb{Z}, \text{ пусть } a^2 - a = n_1$$

$$a^4 - a = a(a^3 - 1) = a(a-1)(a^2 + a + 1) \in \mathbb{Z}, \text{ пусть } a^4 - a = n_2$$

$$\text{тогда } n_2 = (a^2 + a + 1)n_1$$

$$\text{пусть } n_2 \neq n_1, \text{ тогда } a^2 + a + 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a \in \mathbb{Z} \\ a^2 - a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 2a \in \mathbb{Z}$$

$2a \in \mathbb{Z}$, и тогда дробная часть a либо 0, либо $\frac{1}{2}$ (т.к. при вычитании 2-х целых получим целое число).

Пусть дробная часть $\frac{1}{2}$, тогда $a = b + \frac{1}{2}$, где $b \in \mathbb{Z}$, тогда $(b + \frac{1}{2})^2 - b - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$,
 $\Rightarrow b^2 + b + \frac{1}{4} - b - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 - \frac{1}{4} \in \mathbb{Z}$, но $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 \in \mathbb{Z}$, а значит, что $b^2 - \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ дробная часть $a \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ дробная часть 0, что означает, что $a \in \mathbb{Z}$.