ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
22		Коршикова Е.	

Шифр

1	2	3	4	5	Σ
4	3	7	7	1	22

где тут где ??

Задание № 1

$$\underbrace{(10+a-b)^2}_{1}+\underbrace{(2+b-c)^2}_{2}+\underbrace{(3+c-a)^2}_{3}$$

Ну так посмотрим на уравнение? на вид оно очень страшное но на самом деле впринципе легкое, для вашего понимания я буду делать его по действиям и объяснять вам. Ну так что погнали!

1) Первое действие давайте посмотрим на скобки

1. $(10+a-b)^2$
2. $(2+b-c)^2$ → давайте их раскроем
3. $(3+c-a)^2$

2) Раскрытие скобок 1) $100+a^2+b^2+20a-20b-2ab$

2) $4+b^2+c^2+4b-4c-2bc$ 3) $9+c^2+a^2+6c-6a-2ac$

3) Давайте теперь все просуммируем.

$113+2a^2+2b^2+14a-16b+2c-2ab-2bc-2ac$ $2c^2$ – где?

4) Теперь мы сможем сделать систему уровнений

$$\begin{cases} 4a-2b-2c=-14 \\ -2a+4b-2c=16 \\ -2a-2b+4c=-2 \end{cases}$$

$\rightarrow c=2a-b+7$

⇒ Теперь из первого системы вычтем

Теперь давайте подставим

$$\begin{cases} -a+b=5 \\ a-b=-5 \end{cases}$$

⇒ Решение данной системы и всего примера вы можете увидеть на следующей строчке.

Откуда система? В записи пояснения.

ОРМО

Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Продолжение к задаче

Так мы остановились на системе

$$\begin{cases} -a+b=5 \\ a-b=-5 \end{cases} \Rightarrow$$

решаем $b=a+5$ $\quad c=a+2$ $\Rightarrow$ Подставим в исходное выраж

$$\begin{cases} 10+a-b=5 \\ 2+b-c=5 \\ 3+c-a=5 \end{cases} \; ? \Rightarrow$$

Каждое слагаемое равно $5^2=25$

Сумма $25+25+25=75$

Ответ: $\underline{75}$

где доказательства нет.

Задача №2

$f(x)=x^2+ax+b$ с целыми коэффициентами выполняется неравенство $f(x)\geq -\frac{9}{10}$ для всех действительных x

А нам нужно доказать что для всех действительных x выполняется $f(x)\geq -\frac{1}{4}$

извечаюсь уже устал

Доказываем: расмотрим квадратичный трехчлен ($\cancel{f(x)\geq -\frac{1}{4}}$)

$f(x)=x^2+ax+b$ с целыми коэффицентами a и b

Минимальное значение этого трехчлена достигается в точке $x_0=-\frac{a}{2}$ и равно $f(x_0)=-\frac{a^2}{4}+b$

Из условия $f(x)\geq -\frac{9}{10}$ для всех действительных x следует $-\frac{a^2}{4}+b\geq -\frac{9}{10} \Rightarrow b\geq \frac{a^2}{4}-\frac{9}{10}$

ОРМО

Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Поскольку b целое число оно должно удовлетворять неравенство $b=\left[\frac{a^2}{4}-\frac{9}{16}\right]$?

Так давайте немного отдохнем

5 минут спустя.

Так давайте начинать сейчас есть два случая

Первый a - четное Пусть $a=2k$, где $k\in\mathbb{Z}$ тогда и еще как b целое число, $b\ge k^2$

Теперь подставляем в минимальное значение

$$f(x_0)=-\frac{(2k)^2}{4}+b=-k^2+b\ge -k^2+k^2=0\ge-\frac{1}{4}$$

Теперь давайте разберем a - нечетное ?

Пусть $a=2k+1$ где $k\in\mathbb{Z}$ тогда $\frac{a^2}{4}=k^2+k+\frac{1}{4}$ и

$b\ge k^2+k+\frac{1}{4}-\frac{9}{16}$ так как b целое, $b\ge k^2+k$?!

Подставляем в мин. значение если $\frac{1}{4}-\frac{9}{16}<0$, но

$$f(x_0)=-\frac{(2k+1)^2}{4}+b=-\left(k^2+k+\frac{1}{4}\right)+b\ge -k^2-k-\frac{1}{4}+k^2+k=-\frac{1}{4}$$

Так давайте теперь напишем вывод: $\frac{1}{4}-\frac{9}{16}<0$

Вывод: в обоих случаях минимальное значение $f(x)$ удовлетворяет неравенство $f(x)\ge-\frac{1}{4}$

Следовательно для всех действительных x выполняется $f(x)\ge-\frac{1}{4}$ $\cancel{+}$ Если хотите увидеть решение 3

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Раз вас спор видите теперь мы решим задачу №3

Задача №3

$a_1 = 25$ $\quad a_{2025} = 625$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}}+\sqrt{a_{2025}}}$$

Теперь я бы хотел решить это очень очень страшное выражение через метод СИГМЫ :) Но я не прям хорошо его знаю

$$S = \sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \Rightarrow a_{2025} = a_1 + (2025-1)d$$

Теперь вподставляем наши выражения.

$$625 = 25 + 2024d \Rightarrow 2024d = 600 \Rightarrow d = \frac{600}{2024} = \frac{75}{253}$$

Теперь давайте преобразуем каждое слагаемое.

и умножим числитель знаменатель на разность корней.

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}$$

Так как $a_{n+1} - a_n = d$ $\longrightarrow$ Подстав. $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{d}$

Теперь преобразуем сумму.

$$S = \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{2024}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)$$

Теперь подставляем наши значения

Подставляем

$\sqrt{625} - \sqrt{25} = 25 - 5 = 20$

Вычисляем итоговое знач.

$d = \frac{75}{253}$

Осталось посчитать

Чтобы узнать остальное решение

ОРМО

Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Так давайте найдем эту сумму $S = \frac{1}{\frac{75}{253}} \cdot 20 = \frac{253}{75} \cdot 20 = \frac{5060}{75} = \frac{1012}{15}$ Вот ответ Я незнаю он правильный или нет но я думаю что да.

Теперь давайте решим номер 4

№ 4

Дано

$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

Найти $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$ где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

Так давайте преступать к решению давайте разделим $P(x)$ на $Q(x)$ Старшие член $P(x)$ — x^6 а в $Q(x)$ — x^4 Делим x^6 на x^4 получаем x^2 Теперь умножаем $Q(x)$ на x^2 $\Rightarrow$ $x^2 \cdot Q(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2$

Вычисляем из $P(x)$

$P(x) - x^2 \cdot Q(x) = R(x) = -x + 50$

Выражаем $P(x)$ через $Q(x)$

$P(x) = Q(x) \cdot x^2 + (-x + 50)$

При подстановке корней x_1, x_2, x_3, x_4 в многочлен $Q(x)$ получаем $P(x_i) = 0 \cdot x^2 + (-x_i + 50) = -x_i + 50$

Теперь найдем сумму $P(x_i)$

Тоже буду использовать метод СИГМЫ

$$\sum_{i=1}^{4} P(x_i) = \sum_{i=1}^{4} (-x_i + 50) = -\sum_{i=1}^{4} x_i + 4 \cdot 50$$

Затем вычисляем $Q(x)$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = -\frac{\text{коэффиц } x^3}{\text{коэффиц } x^4} = -\frac{1}{1} = -1.$$

$Q(x) \Rightarrow$ По теореме Виета $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

Чтобы увидеть конечное решение переверните лист.

ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Так мы продолжаем решать номер №4.

Нам осталось подставить данные $\sum_{i=1}^{4} P(X_i) = -(-1)+200 = 1+200 =$
$= 201$ Ответ: **201**

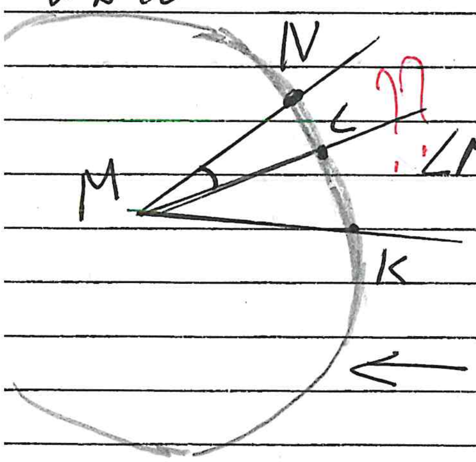
Так давайте
чуть чуть отдохнем
вы устали это читать а я писать

5 минут спустя

Так давайте продолжим решать №5!

Извините за плохой чертеж
у меня был только ручка и карты

Дано



$MN - ?$
$MK - ?$ $S_{MNLK} = 81$
?? LM — биссектриса. $\angle LMN = 30°$

N4k ~~домашка~~.

← Это окружность

Т. М не центр окр-ти.

Решение:

Давайте теперь решать

$MN = x$ $MK = y$ $\angle LMN = 30°$

ML — по свойству биссектрисы $\frac{x+y}{2\cos 30°} = \frac{x+y}{\sqrt{3}}$?

Площадь четыр. $MNLK$ разб. на два треуг. ΔLMN и ΔLMK
их площ. $S_{LMN} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot ML\cdot \sin 30°$
$S_{LMK} = \frac{1}{2}\cdot y\cdot ML\cdot \sin 30°$ Общая площадь $S = \frac{1}{2}\cdot ML\cdot(x+y)\cdot\frac{1}{2} =$
$= \frac{1}{4}\cdot ML\cdot(x+y)$ По условию $S = 81$
ML = ?
$\frac{1}{4}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{3}}\cdot(x+y) = 81 \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4\sqrt{3}} = 81 \Rightarrow (x+y)^2 = 324\sqrt{3}$

Продолжение смотрите на следующем листе ;)

ОРМО

Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О Жюри	Подпись
		Шифр.	

Так мы остановились на решение №5. Листы уже кончились пришлось писать на таком так что простите.

Так мы остановись на подсчете общей площади

$(x+y)^2=324\sqrt{3}$ => давайте это упростим

$x+y=\sqrt{324\sqrt{3}}=18\cdot 3^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt{3}=1.732$

$324\cdot 1.732\approx 560.9 \Rightarrow \sqrt{560.9}\approx 23.69$

Округл. до целого 24.

Но это не ответ я допускаю что в задаче площадь должна быть не 81 а $81\sqrt{3}$?

Тогда $(x+y)^2=324 = x+y=18$?

Что исходя из заданного условия

Ответ: будет: 162. Нет

Благодарю что досмотрели мою работу до конца

Желаю удачи.