

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
25	18.03.25	Телурин	
Шифр			048117

1/2/3/4/5
7/7/7/3/0

~~Handwritten scribbles~~

~2

~2

$$(a^2 - a) \in \mathbb{Z}$$

$$(a^4 - a) \in \mathbb{Z}$$

1) Поскольку если отнять от целого числа целое мы получим целое $\Rightarrow a^4 - a - (a^2 - a) = a^4 - a^2 = (a^2 - a)(a^2 + a) \in \mathbb{Z}$, поскольку $(a^2 - a) \in \mathbb{Z}$ (по ум.), а чтобы произведение было целым оба числа должны быть целыми $\Rightarrow (a^2 + a) \in \mathbb{Z}$.

2) $(a^2 + a) - (a^2 - a) = 2a \in \mathbb{Z}$ (т.к. если от целого числа отнять целое мы получим целое)

3) предположим что a - нецелое, тогда оно должно иметь вид $\dots, 5$; поскольку это если еще запятой будем стоять после запятой, то при умножении на 25 a не будет целым числом. Но если у нас $a = \dots, 5$ $\Rightarrow a^2 = \dots, 25$; но тогда $a^2 - a = \dots, 25 - \dots, 5 = \dots, 20$ - что противоречит условию $(a^2 - a) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ наше предположение не верно и a - целое число $\Rightarrow$ 2. п.р.

25

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

043117

$$\begin{aligned}
 1) a_n &= 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4}{n^4} + \frac{2n^3}{n^4} - \frac{2n}{n^4} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \\
 &= \frac{n^4 - 1 + 2n^3 - 2n}{n^4} = \frac{(n-1)(n^3 + n^2 + n + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \\
 &= \frac{(n-1)(n^3 + n^2 + n + 1) + 2n(n-1)(n+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n^3 + n^2 + n + 1 + 2n^2 + 2n)}{n^4} = \\
 &= \frac{(n-1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{29} &= \frac{(2-1)(2+1)^3}{2^4} \cdot \frac{(3-1)(3+1)^3}{3^4} \cdot \frac{(4-1)(4+1)^3}{4^4} \cdot \dots \\
 &\dots \cdot \frac{(29-1)(29+1)^3}{29^4} = \frac{1 \cdot 3^3}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdot \dots \cdot \frac{(29-1)28 \cdot 28^3}{29^4},
 \end{aligned}$$

как уже видно числитель знаменателя дроби сокращается с числителем соседней с ней дроби, $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{2}{2^4} \cdot \frac{28^3}{29} &= \frac{28^3}{2 \cdot 29} = \frac{(8 \cdot 10)^3}{2 \cdot 29} = \frac{8^3 \cdot 1000}{2 \cdot 29} = \frac{64000}{29} = \\
 &= 810 \frac{10}{29}
 \end{aligned}$$

Ответ: $810 \frac{10}{29}$

70

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

~4

1) Пусть в первой корзине n яблок, а во второй m яблок. Пусть a - средний вес яблок в 1 корзине, а b - средний вес яблок во 2 корзине.

$$2) \begin{cases} \frac{na-x}{n-1} = a+3 \\ \frac{mb+x}{m+1} = b+3 \end{cases} ; x - \text{вес перемешанного яблока}$$

$$\begin{cases} x = na - (a+3)(n-1) \\ x = -bm + (b+3)(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = na - an + a - 3n + 3 \\ x = -bm + bm + b + 3m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

30

$$\begin{cases} x = a - 3n + 3 = a - 3(n-1) \\ x = b + 3m + 3 = b + 3(m+1) \end{cases} \Rightarrow a - 3(n-1) = b + 3(m+1)$$

3) ~~$a - 3(n-1)$~~

$$\begin{cases} \frac{(n-1)(a+3) - y}{n-2} = 1,05(a+3) \\ \frac{(m+1)(b+3) + y}{m+2} = 1,03(b+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (a+3)(n-1) - 1,03(a+3)(n-2) \\ y = (b+3)(m+1) - 1,05(b+3)(m+2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+3)(n-1) - 1,03(a+3)(n-2) = (b+3)(m+1) - 1,05(b+3)(m+2)$$

$$(a+3)((n-1) - 1,03(n-2)) = (b+3)(1,03(m+2) - m+1)$$

$$n-1 - 1,03(n-2) = n-1-1,03n+2,06$$

$$(a+3)(-0,03n+1,06) = (b+3)(0,03m+1,06), \text{ т.к. } a-b=3(m+m) \Rightarrow$$

$$(a+3)(-0,03n+1,06) = (a-3(n+m)+3)(0,03m+1,06)$$

$$(a+3)(-0,03n+1,06) = (a-3n-3m+3)(0,03m+1,06)$$

Ответ: 100

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

~ 1

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

$$2x^2 + 2y^2 = 5xy$$

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0$$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0$$

Пусть $z = \frac{x}{y}$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{5}{2} \\ z_1 \cdot z_2 = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(м. Виета)

70

н.к. $x > y$, то $z = \frac{x}{y} > 1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow$

$$x = 2y \Rightarrow \frac{(x+y)}{(x-y)} = \frac{2y+y}{2y-y} = \frac{3y}{y} = 3$$

Ответ: 3

✓