Шифр 07699

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
~~24,5~~ 23	20.03	Кофрижеева Е.Е.	

30,5

1	2	3	4	5	Σ
6	7	4	7	0	23

№2

$0<x<\frac{1}{2}$

$0<y<\frac{1}{2}$

$y^2-x^2>y-x \Rightarrow (y-x)(y+x-1)>0$

Т.к. $0<y,\ x<\frac{1}{2}$, то $y+x<1 \Rightarrow y+x-1<0 \Rightarrow$

$\cancel{y-x>0}$ $y-x<0$

Рассмотрим неравенство

$y^3-x^3>y-x$

$(y-x)(y^2+xy+x^2-1)>0$ ~~из ранее~~

Рассмотрим выражение $y^2+xy+x^2-1=(y+x)^2-1-xy$

т.к. $0<x<\frac{1}{2}$ и $0<y<\frac{1}{2}$, то $0<y+x<1 \Rightarrow (y+x)^2<1 \Rightarrow$

$(y+x)^2-1<0$ и $xy>0 \Rightarrow -xy<0 \Rightarrow$

$(y+x)^2-1+(-xy)<0 \Rightarrow y^2+xy+x^2-1<0$

И из ранее доказанного $y-x<0 \Rightarrow$

$(y-x)(y^2+xy+x^2-1)>0 \Rightarrow y^3-x^3>y-x$ что

+

№1

Пусть наше число записано в виде

$1000a+100b+10c+d$, где $1\le a\le 9$, $0\le b,c,d\le 9$

K – отношение

$$K=\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=\frac{a+b+c+d+999a+99b+9c}{a+b+c+d}=$$

$$=1+\frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}$$, т.к. K должно

быть минимальным, дробь $\frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}$ –

должна быть минимальной т.к. d находится

только в знаменателе $\Rightarrow$ d должно быть максимальным

$\Rightarrow d=9 \Rightarrow K=1+\frac{999a+99b+9c}{a+b+c+9}=$ ~~$9(a+b+c)=$~~

$$=\frac{9(a+b+c+9)+990a+90b-81}{a+b+c+9}+1=10+\frac{990a+90b-81}{a+b+c+9}$$

т.к. $a\ge 1$ $\Rightarrow$ числитель положительный $\Rightarrow$ чтобы

K – было минимальным значением должен быть максимальным

$$\Rightarrow c=9 \Rightarrow K=10+\frac{990a+90b-81}{a+b+18}=10+\frac{90(a+b+18)+900a-1701}{a+b+18}=$$

$$=100+\frac{900a-1701}{a+b+18}$$

Чтобы K – было минимальным, то $\frac{900a-1701}{a+b+18}$

должна быть меньше нуля

Место для скобы

Шифр 07699

№1

~~Пример при~~

~~Для~~ и зачеркнуть как можно меньше

$\Rightarrow b=0 \Rightarrow k=100+\frac{900a-1701}{a+18}$, но

$\frac{900a-1701}{a+18}$ принимает отриц. ранее

Очень отрицательный $\Rightarrow a=1$

$\Rightarrow a=1 \quad b=0 \quad c=9 \quad d=9$

Ответ: 1099

№3

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

~~$P(17)=$~~ $P(17)=2024$

$a_n(17)^n + a_{n-1} 17^{(n-1)} + a_{n-2} 17^{n-2} + \ldots + a_1 17 + a_0 = 2024$

Рассмотрим левую и правую часть по модулю 17

$0+a_0 \underset{17}{=} 2024 \Rightarrow a_0 \underset{17}{=} 1$,

~~Рядовно~~

$P(101)=2024$

$a_n(101)^n + a_{n-1}(101)^{n-1} + a_{n-2}(101)^{(n-2)} + \ldots + a_1 101 + a_0 = 2024$

Рассмотрим левую и правую часть по модулю 101

Место для скобы

Шифр 07699

$\Rightarrow 0 + a_0 \underset{101}{\equiv} 2024 \Rightarrow a_0 \underset{101}{\equiv} 4$

$\Rightarrow$ т.к. a_0 даёт остаток 1 при делении на 17, и остаток 4 при делении на 101

$$\begin{cases} |a_0| \le 999 \\ a_0 = 101m + 4 \\ a_0 = 17k + 1 \end{cases}, \text{ где } k, m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 101m + 4 = 17k + 1 \\ |a_0| \le 999 \end{cases}$; $17(6m - k) - m + 3 = 0$?

неочевидно

т.к. $|a_0| \le 999 \Rightarrow -10 \le m \le 10$?

неочевидно

$17(6m - k) - m + 3 = 0$

$17(6m - k) \underset{17}{\equiv} m - 3 \Rightarrow m - 3 \underset{17}{\equiv} 0$ т.к. $-10 \le m \le 10 \Rightarrow$

$m = 3 \Rightarrow k = 18 \Rightarrow a_0 = 307$

Ответ: 307

№4

$\cos 2x \overset{\text{об}}{=} y$

$\sin x \overset{\text{об}}{=} z$

Тогда $y + y^{2023} + y^{2025} = z + z^{2023} + z^{2025}$

Пусть $F(t) = t + t^{2023} + t^{2025}$

~~$F'(t) = 1 + t^{2022} + t^{2024}$ $F'(t) > 0 \Rightarrow F(t)$ возрастает $\Rightarrow$ $F(y) = F(z) \Leftrightarrow y = z$~~

Место для скобы

Шифр

$\Rightarrow \cos 2x = \sin x$

$1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = \\ \sin x = \end{array}\right.$

~~№4~~ №1

$F'(t) = 1 + 2023 t^{2022} + 2025 t^{2024}$

$F'(t) > 0 \Rightarrow F(t)$ возрастающая функция

$\Rightarrow F(y) = F(z) \Leftrightarrow y = z$

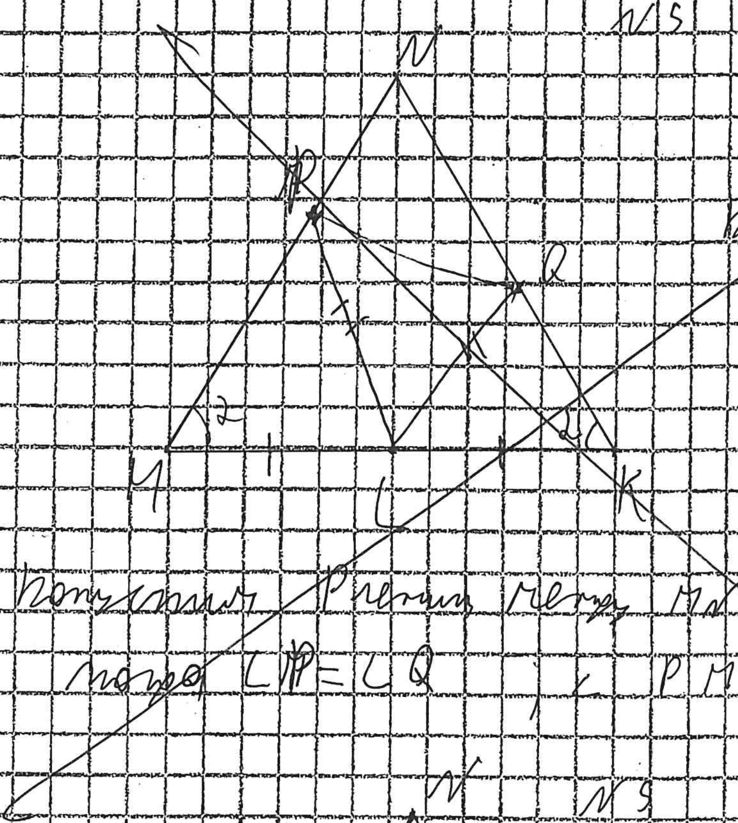
$\cos 2x = \sin x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\}$, $\{\frac{\pi}{6} + 2\pi n\}$, $\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$

№5

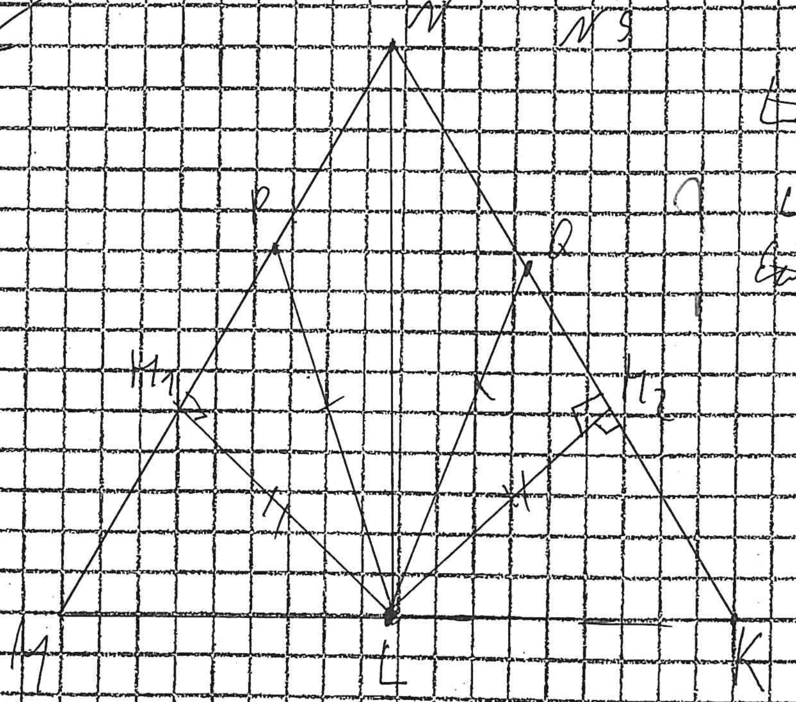


$\angle M = \angle K$

Положим P и Q и PQ не лежит ... на лежать на одной прямой и K тогда P и Q будут совпадать

Положим P лежит между MN и Q лежит между NK тогда $LP = LQ$, $\angle PML = \angle QKL = \alpha$

№5



~~LH~~ L - середина MK

$LH_1 \perp MN$; $LH_2 \perp NK$

~~Если~~

1) Пусть ~~N~~ $P \in MH_1$

$Q \in NH_2$

~~LH_1~~

$LH_1 = LH_2$; $H_1M = H_2K$

т.к. равнобедренный треугольник

$LP = LQ$, $LH_1 = LH_2 \Rightarrow QH_2 = PH_1$

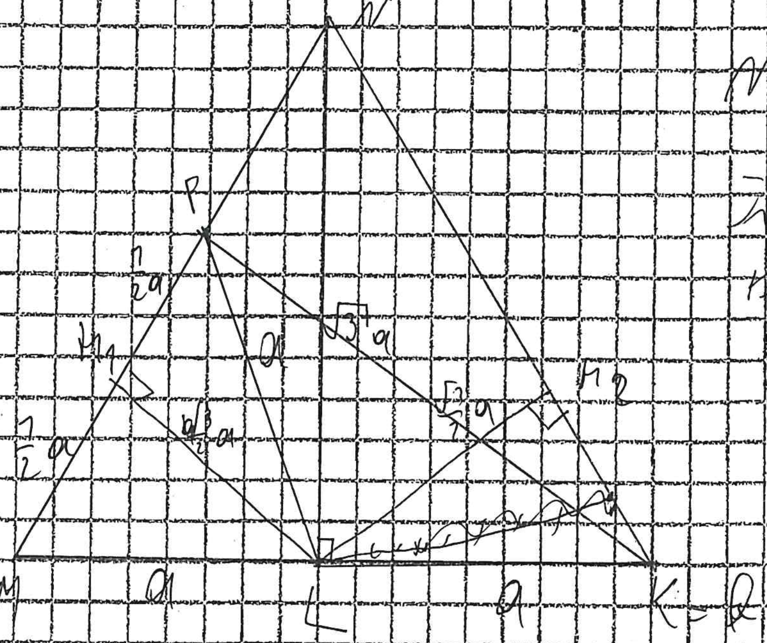
$\Rightarrow MP = QK$ и ~~PQ средняя~~ линия $\Rightarrow PQ \parallel MK$

по аналогии если $P \in MH_1$ и $Q \in H_2K \Rightarrow$

~~P и Q~~

⇒ либо $P \in H_1N$ и $Q \in H_2K$ или $P \in H_1M$ и $Q \in H_2N$

При определенности пусть $P \in H_1N$ и $Q \in H_2K$



$NK = 2a$, $LK = a$

Рассмотрим положение когда $Q = K$ ⇒ $LP = a$

$NL = \sqrt{3}a$, $NK = 2a$

⇒ $LH_2 = \frac{\sqrt{3}a \cdot a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ⇒ $LH_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

⇒ $H_1P = \frac{1}{2}a$, $MH_1 = \frac{1}{2}a$ т. P прав-в.

~~Рассмотрим~~

$\triangle H_1ML \sim \triangle PMK$, т.к. $\angle M$ - общий

и $\frac{H_1M}{MP} = \frac{ML}{MK}$ ⇒ $PK = \sqrt{3}a$. ?

~~Будет сдвигать точку K.~~ Сдвигаем точку K чуть чуть ближе к H_2 тогда P сдвинется чуть чуть ближе к H_1

~~и то~~ длина PQ будет уменьшаться. И так пока $P = H_1$ и KH_2 тогда $PQ \parallel MK$, а если продолжить дальше сдвигать PQ, то в силу симметрии PQ будет принимать те же значения, которые принимала

Шифр

приведении точки K к M_2 и P к M_1

$M_1M_2 = \frac{3}{2}a$, т.к $M_1M_2 \parallel MK$

$\Rightarrow PQ \in \left(\frac{3}{2}a; \sqrt{3}a\right]$

Найдем a

т.к $S_{MKP} = 1$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a^2 = 1$

$a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$a = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\cancel{PQ \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}; \right. \left(\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{3}}; \right)}$ $\sqrt[4]{3}$ $\sqrt[4]{3}$

$PQ \in \left(\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}{1}\right]$