Место для скобы

Шифр 08503

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19б	23.03.24	Бесутина	

1	2	3	4	5
6	7	3	2	1

N 1

$\exists a$ – искомое число; x, y, z, d – цифры числа a $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{x+y+z+d} \to \min \Leftrightarrow \begin{cases} a \to \min, \\ x+y+z+d \to \max; \end{cases}$$

I. a стремится к минимуму – проверим это:

$$\left.\begin{aligned} &\exists a = 3099 \Rightarrow \frac{3099}{21} \approx 147{,}6 \\ &\exists a = 1099 \Rightarrow \frac{1099}{19} \approx 57{,}8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ ~~чем меньше a, тем меньше результат~~ ~~сумма чисел~~

$\Rightarrow$ чем меньше a, тем меньше частное. ~~a и сумма его цифр~~

II. $x+y+z+d$ стремится к максимуму:

$$\left.\begin{aligned} &\exists a = 1099 \Rightarrow x+y+z+d = 19; \quad \frac{1099}{19} \approx 57{,}8 \\ &\exists a = 1098 \Rightarrow x+y+z+d = 18; \quad \frac{1098}{18} = 61 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ чем больше сумма цифр, тем меньше результат

Число 1099 начинается с наименьшего разряда тысячных. Если увеличить разряд сотых:

$$\frac{1199}{20} \approx 59{,}9 < \frac{1098}{18}; \quad 59{,}9 > \frac{1099}{18}$$

Если уменьшить разряд десятых:

$$\frac{1089}{18} \approx 60{,}5 > 57{,}8 \Rightarrow$$ при $a = 1099$ результат наименьший.

Ответ: $a_{min} = 1099$

6б

N2

Дано: $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ y^2 - x^2 > y - x \end{cases}$

Док-ть: $y^3 - x^3 > y - x$

Место для скобы

Шифр 08503

Док-во: $y^2 - x^2 > y - x \Rightarrow (y-x)\cdot(y+x) > y-x$; т.к. $y, x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y+x$ – всегда полож. $\Rightarrow y+x > y-x$

13

Предположим, что $y<x \Rightarrow y-x<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ если $(y-x)\cdot(y+x) > y-x \Leftrightarrow$ произв. отриц. и полож. чисел больше, чем отриц. число $\Rightarrow y+x < |y-x|$
~~Если $x < y \Rightarrow y$~~ Если $x<y \Rightarrow y-x>0$:
$\exists\ x = \frac{1}{8},\ y = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{2-1}{8}\cdot\frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}$
$\frac{3}{8} > \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$ – верно
$\exists\ x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) < \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{3}{8} < -\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{3}{8} < -\frac{1}{8}$ – верно $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y>x, \\ y<x. \end{array}\right.$

$y^3 - x^3 > y - x \Rightarrow (y-x)\cdot(y^2+yx+x^2) > y-x$
y^2+yx+x^2 – неполный квадрат всегда >0
1) $y>x$: $\exists\ y = \frac{1}{4},\ x=\frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1^4}{16}+\frac{1^2}{32}+\frac{1^1}{64}\right) > \frac{1}{4}-\frac{1}{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{8}\cdot\frac{7}{64} > \frac{1}{8}$ – неверно
2) $y<x$: $\exists\ y = \frac{1}{8},\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right) > \frac{1}{8}-\frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{7}{64} > -\frac{1}{8}$ – верно $\Rightarrow$
$\Rightarrow y^3 - x^3 > y-x$ при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right),\ y \in \left(0; \frac{1}{2}\right),\ y<x$
ч. т. д.

30

№ 3

Дано: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. $P(17) = P(101) = 2024$.
$|a_0| < 999$.
Найти: всевозможные значения a_0
Решение: а) Число 17 при возведении в любую целую степень может дать числа, оканчивающиеся на 7, 9, 3 или 1.
Сумма одночленов от P_1 до P_n может оканчиваться на 7, 9, 3 или 1.

Место для скобы

Шифр 08503

Т.к. $|a_0| < 999 \Rightarrow$ начинаем проверку с $2024 - 999 = 1025$

Первое подходящее число $= 1027$

$$\sum_{l=1}^{l=n}(a_l \cdot x^l) = \left[\begin{array}{l} 1027 \Rightarrow a_0 = 2024 - 1027 = 997, \\ 1029 \Rightarrow a_0 = 2024 - 1029 = 995, \\ 1031 \Rightarrow a_0 = 993, \\ 1033 \Rightarrow a_0 = 991, \\ 1037 \Rightarrow a_0 = 987, \\ \ldots, \\ 2023 \Rightarrow a_0 = 1; \end{array}\right.$$

$7 \cdot 7 = 49$
$49 \cdot 7 = 343$
$343 \cdot 7 = \ldots 1$
$\ldots 1 \cdot 7 = \ldots 7$

С другой стороны, если $a_0 < 0 \Rightarrow$ начинаем проверку с $2024 + 999 = 3023$

$$\sum_{l=1}^{l=n}(a_l \cdot x^l) = \left[\begin{array}{l} 3021 \Rightarrow a_0 = -3021 + 2024 = -997, \\ 3019 \Rightarrow a_0 = -3019 + 2024 = -995, \\ 3017 \Rightarrow a_0 = -993, \\ 3013 \Rightarrow a_0 = -989, \\ \ldots, \\ 2027 \Rightarrow a_0 = -2027 + 2024 = -3. \end{array}\right.$$

б) $P(101)$: $101^2 = 10201$; $101^3 = \ldots 1$

Все одночлены заканчиваются на 1; $a_0 + a_1 \cdot 101 + a_2 \cdot 10201$ — амплитуда значений слишком большая, значит знаки должны чередоваться) $\Rightarrow$ в сумме одночлены от P_1 до P_n могут дать либо 1 на конце, если их кол-во нечётное, или 0 на конце, если чётное кол-во.

Т.к. $|a_0| < 999 \Rightarrow$ начинаем проверку с $2024 - 999 = 1025$

$$\sum_{k=1}^{k=n}(a_k \cdot x^k) = \left[\begin{array}{l} 1030 \Rightarrow a_0 = 2024 - 1030 = 994, \\ 1031 \Rightarrow a_0 = 993, \\ 1040 \Rightarrow a_0 = 984, \\ \ldots \\ 2021 \Rightarrow a_0 = 3. \end{array}\right.$$

С другой стороны, если $a_0 < 0$, начинаем с $2024 + 999 = 3023$ (3023 не включ.)

$$\sum_{k=1}^{k=n}(a_k \cdot x^k) = \left[\begin{array}{l} 3021 \Rightarrow a_0 = 2024 - 3021 = -997, \\ 3020 \Rightarrow a_0 = -996, \\ \ldots, \\ 2030 \Rightarrow a_0 = -6 \end{array}\right.$$

~~Ответ: $a_0 \in a_0 = [1; 3 \ldots; 995; 997] \cup a_0 = [3; 5; \ldots; 995; 997] \cup [3; 4; \ldots; 994]$~~ $\cup$ [

Место для скобы

Шифр 08503

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

Ответ: ~~$a_0 \in 1; 3; 995;$~~ $a_0 \in [1; 3; \ldots; 995; 997] \cup [3; 4; \ldots; 994] \cup$
$\cup [-997; -995; \ldots; -3] \cup [-997; -996; \ldots; -6]$

N 4

$\cos 2x + \cos^{2023} 2x + 2024 \cdot \cos^{2025} 2x = \sin x + \sin^{2023} x + 2024 \cdot \sin^{2025} x$

Предположим, что $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$ знаки разные, равенство не выполняется

Нет обосн.

Единственный возможн. случай:

$\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cancel{2\cos^2 x}\ 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \Rightarrow$

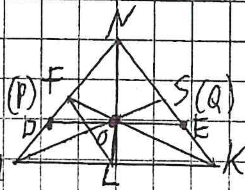
$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+9}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 2 \notin [-1; 1] \\ \sin x = -1.\end{array}\right.$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

2б

1б



N 5

Дано: $\triangle MNK$ – р/с. $P \in MN$, $Q \in NK$
L – середина MK. $PL = QL$. $PQ \parallel MK$, $S_{MNK} = 1$ (ед²)
Найти: пределы размера отрезка PQ
Решение: Проведём KF, MS, NL – медианы (высоты).

$\triangle MFL \sim \triangle MNK$ по 2-м сторонам и углу ($\angle M$ – общий, $MF \in MN$, $ML \in MK$) $\Rightarrow \triangle MFL$ – равносторонний $\Rightarrow FL = ML$.

Предположим, что FL соответствует PL $\Rightarrow FL = PL$

т.к. L – середина $MK \Rightarrow LK = ML = FL \Rightarrow \triangle FLK$ – р/б, $FL = KL$;
$PL = QL$.

$S_{MNK} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2 \cdot 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (ед.)

$S_{MNK} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a \Rightarrow h = \frac{2 \cdot S}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ед. $PQ = FK = NL = \sqrt{3}$ ед.

Если одновременно опускать точку P и поднимать точку $Q \Rightarrow PL$ будет равен QL, пока PQ не станет параллелен основанию (отрезок DE)

$\triangle DNE \sim \triangle MNK$ по 2-м сторонам и углу $\Rightarrow \frac{NO}{NL} = \frac{DE}{MK}$

медианы в точке перес. делятся в отношении $2:1 \Rightarrow$
$\Rightarrow NO = \frac{2}{3} NL = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $MK = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{DE}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \Rightarrow DE = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ед.

При $PQ = DE$ не выполняется условие $PQ \parallel MK$

Ответ: $|PQ| \subset \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}; \sqrt{3}\right]$