

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
| 18         |      | Коряков     | М       |
| Шифр       |      |             | 042034  |

№1  $f(x) = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$

НАЙТИ минимальное значение

- Возьмем производную относительно переменной  $a$   
 $\Rightarrow$  получим  $f'_a = 2(7+a-b) + 0 - 2(9+c-a) = 0$
- Возьмем производную относительно переменной  $b$   
 $\Rightarrow$  получим  $f'_b = -2(7+a-b) + 2(2+b-c) + 0 = 0$
- Возьмем производную относительно переменной  $c$   
 $\Rightarrow$  получим  $f'_c = 0 - 2(2+b-c) + 2(9+c-a) = 0$

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 \quad / \cdot 2 \\ -4 - 2b + 2c + 18 + 2c - 2a = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 \\ -4a + 8b - 4c - 20 = 0 \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 6b - 6c - 24 = 0 \quad / : 6 \quad (1) \quad b - c = 4 \\ (1) - (3) &\Rightarrow 6a - 6c - 18 = 0 \quad / : 6 \quad (2) \quad \begin{cases} c - a = -3 \\ a - b = -1 \end{cases} \\ a - c &= 3 \end{aligned}$$

$$c - a = -3$$

Подставим в начальное

$$(1) - (2) \quad a - b = -1 \quad \text{и получаем:}$$

$$(4-1)^2 + (2+4)^2 + (9-3)^2 =$$

$$\text{Ответ: } 108 = 36 \cdot 3 = 108$$

№2

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{корни } Q(x)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline 5 & 7 & 3 & 0 & 3 & 18 \end{array}$$



| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

вынесем  $x^2$  из  $P(x)$

получим:  $P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$

заметим, что выражение в скобках  $= Q(x)$ ,

тогда  $P(x) = x^2 Q(x) - x + 506$

найдем корни  $Q(x_1) = -x_1 + 506$  при сложении

$$Q(x_2) = -x_2 + 506$$

$$Q(x_3) = -x_3 + 506$$

$$Q(x_4) = -x_4 + 506$$

получим:

$$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) =$$

$$= -2024$$

С помощью метода неопределенного коэф-та  
перемножим и разложим:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = \\ &= (x^2 - x x_2 - x_1 x + x_1 x_2)(x^2 - x x_4 - x x_3 + x_3 x_4) = \\ &= x^4 - (x_4 + x_3 + x_2 + x_1)x^3 + (x_2 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_1)x^2 - \\ &- (x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)x + (x_3 x_1 + x_4)x^2 - (x_1 x_2 x_3 + \\ &+ x_1 x_2 x_4)x + x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

нужно, чтоб коэф-ты при  $x^3$  совпали  $\Rightarrow$

$$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 1$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 2024 + 1$$

Ответ: 2025

$$\sqrt{3} f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$

Если левая часть уравнения будет  $\geq 1$ , то

уравнение будет иметь 1 корень при

значении  $= 1$ , т.е.  $f(x) = 1$ , покажем, что это так

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр

возьмем левую часть как функцию и построим ее график

$$f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 \quad \text{заменяем: } z = \sqrt{x^2+1}$$

$$f(z) = z^2 - 1 - 6z + 11$$

$$z^2 = x^2 + 1$$

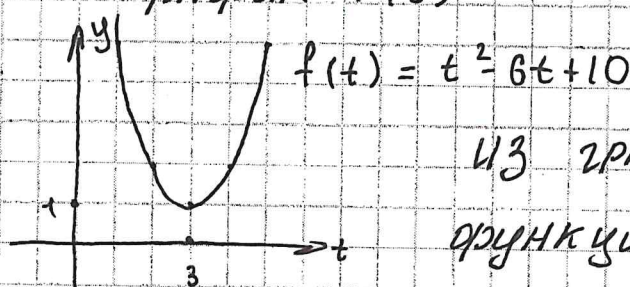
$$f(z) = z^2 - 6z + 10$$

$$z^2 - 1 = x^2$$

$$f'(z) = 2z - 6 \quad 2z = 6 \quad z = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{вершина.}$$

$$y = 1$$

Построим график  $f(z)$



из графика видно, что функция, а вернее ее значение  $\geq 1$ .

Тогда, уравнение имеет один корень при  $f(x) = 1$

$$z^2 - 6z + 10 = 1 \quad z^2 - 6z + 9 = 0 \quad z = 3$$

$$\sqrt{x^2+1} = z \Rightarrow x^2+1 = 9 \quad x^2 = 8$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

ответ?

При  $x = \sqrt{8}$ :

$$\cos \frac{8+4-4}{18} = \cos \frac{10}{18} \neq 1$$

При  $x = -\sqrt{8}$ :

$$\cos \frac{8-4-4}{18} = \cos 0 = 1$$

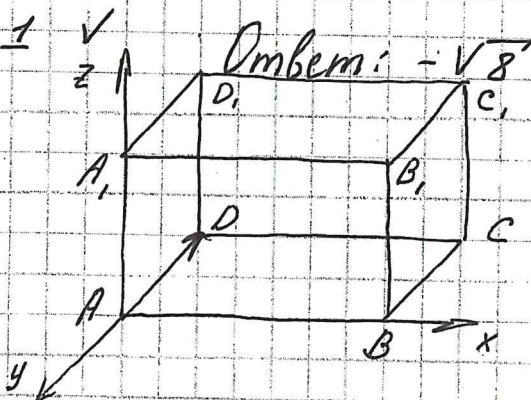
Ответ:  $-\sqrt{8}$

№5 ДАНО:

$ABCD, A_1B_1C_1D_1$

$\alpha \perp A_1C_1 = \alpha, \beta \parallel CD$

?-найти-ли угол  $\alpha, \beta$





| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

Пусть грань куба = 1, тогда

$A(0;0;1)$   $C(1;1;1)$   $B(1;1;0)$   $D(0;1;1)$

$\vec{AC} = \vec{n}_1$  - будет нормалью  $\Delta$ , т.к. он  $\perp \Delta$ .

$$\Rightarrow |\vec{AC}| = \{1;1;0\} \quad |\vec{AC}| = |\vec{n}_1| = \sqrt{2}$$

$\vec{n}_2$  возьмем  $\vec{AD}$  т.к. он  $\perp B$  т.к. он  $\perp DC$ ,  
которая  $\parallel B$   $A(0;0;0)$   $D(0;1;0)$  но 2  
скр  
крен

$$\vec{n}_2 = \{0;1;0\} \quad |\vec{n}_2| = 1$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos P = \sqrt{2} \cos P$$

$$\cos P = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos P = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = 45^\circ$$

Ответ:  $45^\circ$  - минималь-  
ный угол.

~~х~~