

Задача 2

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) \geq -\frac{9}{10} \text{ при всех } x \in \mathbb{R}$$

Доказать, что $f(x) \geq -\frac{1}{4}$

Парабола, ветви вверх

$F_{\min}$ — вершина

1	2	3	4	5	Σ
2	2	6	5	0	15

$$x_B = -\frac{a}{2}$$

$$y_B = \frac{a^2}{4} + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = b - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{то есть } b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{9}{10}, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\text{доказать } b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

$$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} = \frac{5a^2 - 18}{20} \quad b \geq \frac{5a^2 - 18}{20}$$

a — целое

$$a^2_{\min} = 0$$

$$b(\min) \geq \frac{5 \cdot 0 - 18}{20} = -\frac{18}{20} = -\frac{9}{10} \quad \boxed{b \geq -\frac{9}{10}}$$

$$\text{то } b \text{ — целое} \Rightarrow b_{\min} = 0$$

$$b \geq \frac{5a^2 - 18}{20}$$

$$\frac{5a^2 - 18}{20} \leq 0$$

$$5a^2 - 18 \leq 0$$

$$a^2 \leq \frac{18}{5}$$

$$a < 2$$

$$\frac{18}{5} = 3 \frac{3}{5}$$

a — целое

$$a_{\max} \leq \sqrt{\frac{18}{5}}$$

$$a_{\max} = 1$$

$$F_{\min} = b - \frac{a^2}{4}$$

нужно минимальное b и максимальное a

Задача 2 (продолжение)

$$b_{\min} = 0, \quad a_{\max} = 1$$

$$F_{\min} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow F \geq -\frac{1}{4} \text{ орг.}$$

Задача 4

Дано многочлен

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

$$\text{и } Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Найти сумму $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$\text{если } x = 1 \quad Q(x) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1 \neq 0$$

$$x = -1 \quad Q(x) = 1 - 1 - 4 + 1 = -3 \neq 0$$

Группы целых корней быть не могут ?

$$x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

$$x^2 (x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 50$$

$Q(x)$, если $x_{1,2,3,4}$ корни, то $Q(x) = 0$

$$\left(\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4 &= -1 \\ \sum x^6 &= -85 \quad \sum x^5 = 18 \quad \sum x^4 = -21 \quad \sum x^2 = 9 \quad \sum x = -1 \\ S &= (-85) + 18 - 4(-21) + 9 - (-1) + 4 \cdot 50 = 227 \end{aligned} \right)$$

$$\text{значит } \begin{aligned} P(x_1) &= 50 - x_1 \\ P(x_2) &= 50 - x_2 \\ P(x_3) &= 50 - x_3 \\ P(x_4) &= 50 - x_4 \end{aligned}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

но не известно

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 4 (продолжение)

сумма корней многочлена

$$x^4 + x^3 - 9x + 1 = 0$$

$$a_1 = 1 \quad b = 1 \quad c = -9 \quad d = 1$$

$$\sum x = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

коэффициенты

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 200 - (-1) = 200 + 1 = 201$$

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2 \rightarrow \min$$

$$= 100 + 10a - 10b + 10a + a^2 - ab - 10b - ab + b^2 + 4 + 2b -$$

$$- 2c + 2b + b^2 - bc - 2c - bc + c^2 + 9 + 3c - 3a + 3c + c^2 - ac - 3a -$$

$$- ac + a^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 14a - 16b + 2c + 113$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + 14a - 16b + 2c + 113$$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 + 14a - 16b + 2c + 113$$

если

$$a = b = c$$

$$14x - 16x + 2x + 113 = 113$$

✓

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 3

ариф. прогрессия

$$a_1 = 25$$

$$a_{2025} = 625$$

$$d = \frac{625 - 25}{2024} = \frac{600}{2024} = \frac{75}{253} \checkmark$$

Найти:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_3 - a_1} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{a_{2024} - a_{2025}}$$

это сокращается -d

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{2025}}}{-d} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{625}}{-\frac{75}{253}} = \frac{5 - 25}{-\frac{75}{253}} = \frac{-20}{-\frac{75}{253}} = \frac{253 \cdot 20}{75} = \frac{5060}{75} = 67 \frac{35}{75}$$

$$(67 \cdot 75 = 5025)$$

$$= 67 \frac{7}{15} \checkmark$$

Задача 5

$$MN \neq MK$$

$$P_{MNK} = 81$$

$$\angle LMN = 30^\circ$$

Решение:

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot MK \cdot \sin 30^\circ = 81 = \frac{1}{2} MN \cdot MK \cdot \frac{1}{2}$$

$$MN \cdot MK = 324$$

$$MN = MK = x$$

$$x^2 = 324$$

$$x = 18$$

$$MN + MK = 18 + 18 = 36$$

$$S_{MNK} = S_{MNL} + S_{MNL} = \frac{1}{2} MN \cdot ML + \frac{1}{2} MK \cdot ML = \frac{1}{2} \cdot ML \cdot (MN + MK) = 81$$

Ответ: 36

