

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19	20.03	Корсаков Е.А.	И

Задача №2

Рассмотрим условие для x_1 и x_2 :

$$2) \quad y^2 - x^2 > y - x$$

$$(y-x)(y+x) - (y-x) > 0$$

$$(y-x)(y+x-1) > 0$$

also $\int y - x \rightarrow 0$

$$y + x - 1 < 0 \text{ — для всех } x, y \in (0; \frac{1}{2})$$

$$y + x - 1 < 0 \text{ — для всех } x, y \in (0; \frac{1}{2})$$

~~$x > y$~~

$$0 \leq y < x \leq \frac{1}{2}$$

Открыто ли множество?

2. Векторы

$f(t) = t^3 - 2$

Рассмотрим $f(t) = t^3 - t$.

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 3\left(t - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(t + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$f(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}$
 $f(t) = \frac{1}{2}$
 $f(t) = \frac{1}{3}$

На промежутке $[0; \frac{1}{2}]$ $f(t)$ убывает $\Rightarrow$

$y^3 - x^3 > y - x$. Это и требуется доказать.

3 agara n 4

$$\cos(2x) + \overset{2023}{\cos(2x)} + \overset{2025}{2024} \cos(2x) = \sin(x) + \overset{2023}{\sin(x)} +$$

Рассмотрим $f(t) = t + t^{2023} + 2024t$

$$f'(t) = 1 + 2023t^{2022} + 2024t^{2023} + 2025t^{2024}$$

$$\left. \begin{aligned} 2023 \cdot 2022 \geq 0 \\ 2025 \cdot 2024 \geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1 + 2023 \cdot 2022 + 2024 \cdot 2025 > 0, \\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) - \text{монотонно возрастающая функция} \end{aligned}$$

$$f(\cos(2x)) = f(\sin x)$$

$$\cos(2x) = \sin x$$

$$2 \sin x + \sin x - 1 = 0$$

$$2(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{или } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 15

1. $\triangle MNK$ - равнобедренный

Дано: $PE \perp MN, Q \in NK$. Пусть E - середина MN , P и Q равноудалены от E . ($PE = EQ$)

PQ не перпендикулярна MK

$$S_{\triangle MNK} = 1$$

$$S_{\triangle MNK} = 1 = \frac{1}{2} MN \cdot MK \cdot \sin 60^\circ$$

$$MN^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = NK = MK = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$NE = \frac{2S}{MK} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ME = EK = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad NE \perp MN$$

Точки P и Q лежат на $\text{окр}(E; R)$.

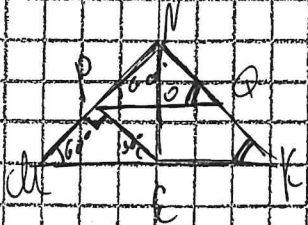
$\text{окр}(E; R)$ может либо касаться либо пересекать MK в двух точках.

Т.к. PQ не перпендикулярна MK , то $R \in (NE; ME)$.

PQ минимальна при $R \rightarrow NE$, и максимальна при $R \rightarrow ME$.

то $NE \leq R \leq ME$

- 1) ~~$R = NE$~~ . Рассмотрим ^{дуга} ~~сегмент~~ $R = NE$.
 ~~PQ — высота $\triangle PQR$~~ $PQ \parallel MK$. ~~H — точка~~ H совпадает с P .
 ~~$HK \perp PE$, $\triangle PQR \sim \triangle PHE$, E — середина PR .~~



$$MP = ME \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{27}}{6}$$

$$\triangle MNE \sim \triangle PNQ \text{ по двум углам } \Rightarrow \text{ по двум углам}$$

$$PN = MN - MP = \frac{2\sqrt{27}}{3} - \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$\triangle PNQ - \text{равносторонний (все углы } 60^\circ) \Rightarrow PQ = PN = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

Значит максимальное значение PQ достигается в $\frac{\sqrt{27}}{2}$ но не достигается.

- 2) $R = NE$. Тогда MK ~~дуга~~ $\Rightarrow P$ совпадает с E , Q совпадает с N . Точка $P = M$. MK ~~дуга~~ $\Rightarrow \angle MKK = 90^\circ$.
 MN — высота $\triangle MNK$.

$$PQ = MN = NE = \sqrt{3}$$

~~PQ — минимальное~~ PQ ~~сегмент~~, но не достигается $\sqrt{3}$

$$\text{Решение: } PQ \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} \right)$$

Ответ: $PQ \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{27}}{2} \right)$

Задача 11

Пусть a, b, c, d — натуральные числа

$$\text{Обозначим } t = a + b + c + d = t.$$

При заданном t отношение $\frac{a}{b+c+d}$ минимально при минимальном значении $\overline{a|b+c+d}$.

Рассмотрим все возможные значения t и $\frac{a}{b+c+d}$ минимальное отношение.

$$k \in [1; 26], t \in \mathbb{N}.$$

$$k = 36: \begin{array}{r} 9999 \\ 36 \end{array} = \begin{array}{r} 1111 \\ 4 \end{array} = 277 \frac{3}{4}$$

$$k = 35: \begin{array}{r} 8999 \\ 35 \end{array} = 257 \frac{3}{5}$$

$$k = 34: \begin{array}{r} 7999 \\ 34 \end{array} = 235 \frac{3}{4}$$

$$k = 33: \begin{array}{r} 6999 \\ 33 \end{array} = 212 \frac{3}{3}$$

$$k = 32: \begin{array}{r} 5999 \\ 32 \end{array} = 187 \frac{3}{2}$$

$$k = 31: \begin{array}{r} 4999 \\ 31 \end{array} = 161 \frac{3}{31}$$

$$k = 30: \begin{array}{r} 3999 \\ 30 \end{array} = \begin{array}{r} 1333 \\ 10 \end{array} = 133 \frac{3}{10}$$

$$k = 29: \begin{array}{r} 2999 \\ 29 \end{array} = 103 \frac{2}{29}$$

$$k = 28: \begin{array}{r} 1999 \\ 28 \end{array} = 71 \frac{1}{28}$$

$$k = 27: \begin{array}{r} 1899 \\ 27 \end{array} = \begin{array}{r} 211 \\ 3 \end{array} = 70 \frac{1}{3}$$

$$k = 26: \begin{array}{r} 1799 \\ 26 \end{array} = 69 \frac{2}{26}$$

$$k = 25: \begin{array}{r} 1699 \\ 25 \end{array} = 67 \frac{2}{25}$$

$$k = 24: \begin{array}{r} 1599 \\ 24 \end{array} = 66 \frac{3}{24}$$

$$k = 23: \begin{array}{r} 1499 \\ 23 \end{array} = 65 \frac{2}{23}$$

$$k = 22: \begin{array}{r} 1399 \\ 22 \end{array} = 63 \frac{1}{22}$$

$$k = 21: \begin{array}{r} 1299 \\ 21 \end{array} = 61 \frac{6}{21}$$

$$k = 20: \begin{array}{r} 1199 \\ 20 \end{array} = 59 \frac{1}{20}$$

$$k = 19: \begin{array}{r} 1099 \\ 19 \end{array} = 57 \frac{1}{19}$$

$$k = 18: \begin{array}{r} 1089 \\ 18 \end{array} = 60 \frac{1}{2}$$

$$k = 17: \begin{array}{r} 1079 \\ 17 \end{array} = 63 \frac{8}{17}$$

$$k = 16: \begin{array}{r} 1069 \\ 16 \end{array} = 66 \frac{13}{16}$$

$$k = 15: \begin{array}{r} 1059 \\ 15 \end{array} = 70 \frac{3}{5}$$

$$k = 14: \begin{array}{r} 1049 \\ 14 \end{array} = 74 \frac{13}{14}$$

$$k = 13: \begin{array}{r} 1039 \\ 13 \end{array} = 79 \frac{12}{13}$$

$$k = 12: \begin{array}{r} 1029 \\ 12 \end{array} = 85 \frac{3}{4}$$

$$k = 11: \begin{array}{r} 1019 \\ 11 \end{array} = 92 \frac{7}{11}$$

$$k = 10: \begin{array}{r} 1009 \\ 10 \end{array} = 100 \frac{9}{10}$$

$$k = 9: \begin{array}{r} 1008 \\ 9 \end{array} = 112$$

$$k = 8: \begin{array}{r} 1007 \\ 8 \end{array} = 125 \frac{7}{8}$$

$$k = 7: \begin{array}{r} 1006 \\ 7 \end{array} = 143 \frac{5}{7}$$

$$k = 6: \begin{array}{r} 1005 \\ 6 \end{array} = 167 \frac{1}{2}$$

$$k = 5: \begin{array}{r} 1004 \\ 5 \end{array} = 200 \frac{4}{5}$$

$$k = 4: \begin{array}{r} 1003 \\ 4 \end{array} = 250 \frac{3}{4}$$

$$k = 3: \begin{array}{r} 1002 \\ 3 \end{array} = 334$$

$$k = 2: \begin{array}{r} 1001 \\ 2 \end{array} = 500 \frac{1}{2}$$

$$k = 1: \begin{array}{r} 1000 \\ 1 \end{array} = 1000$$

Минимальное отношение было при $k = 19$ и числе 1099. Поскольку были рассмотрены все возможные отношения для всех k , то ответ известен 1099.

Ответ: 1099. X

Задача № 3

$$P(x) = 2024 \quad P(17) - 2024 = 0 \quad \text{и} \quad P(101) - 2024 = 0 \Rightarrow$$

17 и 101 — корни уравнения. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - 2024 = 0$

По т. Виета:

$$-a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = P$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n = \frac{a_0 + 2024}{a_n}$$

Поскольку у уравнения ~~два~~ ~~три~~ корня как минимум 2 решения, то $n \geq 2$.

$$n = 2: \quad x_1 = 17, \quad x_2 = 101; \quad 17 \cdot 101 = \frac{a_0 + 2024}{a_2}$$

$$a_0 + 2024 = a_2 \cdot 17 \cdot 101, \quad |a_0| \leq 999, \quad a_2, a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_2 \neq 0$$

$$a_2 = 1: \quad a_0 + 2024 = 17 \cdot 101 - 2024 = (-307) \quad \text{невозможно}$$

$$a_2 = 2: \quad a_0 + 2024 = 34 \cdot 101 - 2024 = 1410, \quad |a_0| \leq 999, \quad \text{невозможно}$$

При $a_2 \geq 2$ $|a_0| > 999$ или $a_2 \leq -1$ ~~равенства~~ ~~неравенства~~ a_0 не соответствует условию $|a_0| \leq 999$

$$n = 3: \quad 17 \cdot 101 \cdot x_3 = \frac{a_0 + 2024}{a_3}$$

/