

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
205	14.03.25	Алугата Н.З	<i>А</i>
Шифр 025-2-М-70			

№1. $[10+a-b]^2 + [2+b+c]^2 + [3+c-a]^2$
Минимальное значение суммы квадратов будет равно нулю
в случае, когда каждый из квадратов равен нулю:

$$\begin{cases} 10+a-b=0 \\ 2+b+c=0 \\ 3+c-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=10+a \\ c=2+b=2+10+a=12+a \\ b=10+a \\ c=12+a \\ b=b \end{cases}$$

Подставим в исходное выражение:

$$[10+a-10-a]^2 + [2+10+a-12-a]^2 + [3+12+a-a]^2 = 0^2 + 0^2 + 15^2 = 15^2 = 225$$

Ответ: минимальное значение выражения равно 225.

№2. $f(x) = x^2 + ax + b$
 $a, b \in \mathbb{Z}$ $f(x) \geq -\frac{9}{10}$ $x \in \mathbb{R}$

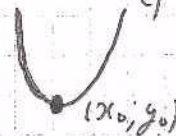
Доказать: $f(x) \geq -\frac{1}{4}$

$f(x) = x^2 + ax + b$ — квадратичная функция, график которой

1. $D(y) = \mathbb{R}$
2. $E(y) = [y_0; +\infty)$, где y_0 — ордината вершины.
3. $x_0 = -\frac{a}{2}$ — абсцисса вершины.

$$f(x_0) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b$$

$\left[-\frac{a}{2}; -\frac{a^2}{4} + b\right]$ — вершина параболы



4. $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -\frac{a}{2}]$
- $f(x)$ возрастает при $x \in [-\frac{a}{2}; +\infty)$

$$5. x_{\min} = -\frac{a}{2} \text{ и } f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b$$

По условию: $f(x) \geq -\frac{9}{10}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, значит $f\left(-\frac{a}{2}\right) \geq -\frac{9}{10} \Rightarrow$

$$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10} \quad \frac{-a^2}{4} + \frac{4b}{4} \geq -\frac{9}{10}$$

$$b \geq -\frac{9}{10} + \frac{a^2}{4} \quad a, b \in \mathbb{Z}, \text{ и } -\frac{9}{10} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$$

b — должно удовлетворять неравенству $b \geq -1$, значит $a, b \geq -1 + \frac{a^2}{4}$

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{4} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

№3. (a_n) — арифметическая прогрессия

$$a_1 = 25, a_2, a_3, \dots, a_{2025} = 625$$

$$\text{Найти: } \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = ?$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-70

№3 (прогрессия)

Дано: $a_1 = 25$

$a_{2025} = 625$

Формула n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$

$$a_{2025} = a_1 + d \cdot (2025 - 1) = 25 + d \cdot 2024$$

Напишем уравнение:

$$625 = 25 + d \cdot 2024$$

$$2024d = 600$$

$$d = \frac{600}{2024} = \frac{150}{506} = \frac{75}{253}$$

$d = \frac{75}{253}$ — разность арифметической прогрессии = 7

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}) \cdot (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}) \cdot (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})} +$$

$$+ \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{(\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}) \cdot (\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}})} = \left[\text{заменим, что } a_{n+1} - a_n = d, \right.$$

$$\left. \text{уравним } a_n - a_{n+1} = -d \right] = \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} + \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_{2026}}}{\sqrt{a_{2025}} + \sqrt{a_{2026}}} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{d} = \frac{25 - 5}{d} = \frac{20}{\frac{75}{253}} = \frac{20}{1} \cdot \frac{253}{75} = \frac{4 \cdot 253}{15} =$$

$$= \frac{1012}{15} = 67 \frac{7}{15}$$

Ответ: $67 \frac{7}{15}$

№4.

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + S(x)$$

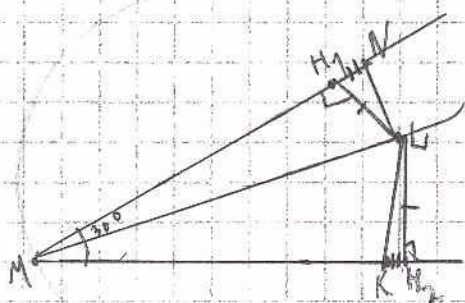
$$P(0) = 0^6 + 0^5 - 4 \cdot 0^4 + 0^2 - 0 + 50 = 50$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 \quad Q(0) = 0^4 + 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

$$P(0) = 50 = 4 \cdot 12.5 = 200$$

Ответ: 200.

№5.



Дано: $\angle M$; ML — биссектриса

$$\angle LMN = 30^\circ$$

Окружность:

$M, N, L, K \in$ окружности

$$\angle MNLK = 90^\circ$$

Найти: $MN + MK$?

Решение: 1) ML — биссектриса $\angle M$ и $\angle LMN = 30^\circ$;

значит $\angle LMK = 30^\circ$ и $\angle NML = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

2) ML — биссектриса, значит точка L равноудалена от сторон $\angle M$, т.е. $PL, MN) = PL, MK) = r$ значит можно опустить перпендикуляры $LH_1 \perp MN$ и $LH_2 \perp MK$

$$PL, MN) = LH_1 \text{ и } PL, MK) = LH_2 = LH_1 = LH_2$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-70

✓ 5 (продолжение)

3) Рассмотрим $\triangle M H_1 L$ и $\triangle M H_2 L$:

1) ML - общая сторона } $\Rightarrow \triangle M H_1 L = \triangle M H_2 L$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow$
2) $L H_1 = L H_2$
 $\Rightarrow \underline{M H_1 = M H_2}$

4) аналогично прямоугольные $\triangle$ -ки $\triangle H_1 N L = \triangle H_2 K L$ (по катету и гипотенузе)

$$5) M N + M K = \underbrace{M H_1 + H_1 N}_{M N} + M K = \underbrace{M H_1 + K H_2 + M K}_{M H_2} = M H_1 + M H_2 = 2 M H_1$$

$$\underline{M N + M K = 2 M H_1}$$

6) т.к. $\triangle M H_1 L = \triangle M H_2 L$, то $\angle M H_1 L = \angle M H_2 L$
Аналогично;

$$\left. \begin{aligned} \angle A H_1 N L &= \angle A H_2 K L \\ 7) \angle M N L K &= \angle A M N L + \angle A M K L = 81^\circ \\ \angle A M N L &= \angle A M H_1 L + \angle A H_1 N L \\ \angle A M K L &= \angle A M H_2 L - \angle A H_2 K L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle A M H_1 L + \angle A H_1 N L + \angle A M H_2 L - \angle A H_2 K L = 81^\circ$$

$$\angle A M H_1 L + \angle A M H_2 L = 81^\circ, \text{ т.к. } 2 \angle A M H_1 L = 81^\circ$$

$$\angle A M H_1 L = \frac{81^\circ}{2} \quad \angle A M H_1 L = \frac{1}{2} \cdot M H_1 \cdot L H_1 = 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot M H_1 \cdot L H_1 = \frac{81^\circ}{2}, \text{ т.к. } \underline{M H_1 \cdot L H_1 = 81}$$

$$\angle y \angle N M L = \angle y 30^\circ = \frac{L H_1}{M H_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{L H_1 = \frac{M H_1}{\sqrt{3}}}$$

$$M H_1 \cdot \frac{M H_1}{\sqrt{3}} = 81; M H_1^2 = 81 \cdot \sqrt{3} = 81 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$M H_1 = \sqrt{81 \cdot \sqrt{3}} = 9 \sqrt[4]{3}$$

$$8) M N + M K = 2 M H_1 = 2 \cdot 9 \cdot \sqrt[4]{3} = 18 \sqrt[4]{3}$$

$$\text{Ответ: } 18 \sqrt[4]{3}$$

МК