

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
17		Емелин	Евгений
Шифр			043337

Задача 1.

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | \cdot 3$$

$$3x^2 + 3y^2 = 10xy$$

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3 - 10\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Пусть $\frac{x}{y} = z$, тогда:

$$3z^2 - 10z + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$$

$$z_1 = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$z_2 = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

П.к. $x > y$, то $\frac{x}{y} > 1 \Rightarrow z = \frac{x}{y} = 3$

$$x = 3y$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2$$

Ответ: 2

Задача 2.

Пойдем от противного:

$$a+b+c < 7$$

П.к. $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$, то можно записать:

$$a = 1+x, \text{ где } x \geq 0$$

$$b = 2+y, \text{ где } y \geq 0$$

$$c = 3+z, \text{ где } z \geq 0$$

$$(1+x) + (2+y) + (3+z) < 7$$

$$6 + x + y + z < 7$$

$$x + y + z < 1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \Sigma \\ 7 & 7 & 1 & 1 & 3 & & 17 \end{array}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			140307

Рассмотрим $a^2 + b^2 + c^2$:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (1+x)^2 + (2+y)^2 + (3+z)^2 = 1+2x+x^2 + 4+4y+y^2 + 9+6z+z^2 = 14+2x+4y+6z+x^2+y^2+z^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14+2x+4y+6z+x^2+y^2+z^2 < 14+2x+4y+6z+y+x+z = 14+3x+5y+7z$$

Нам нужно показать, что $14+3x+5y+7z < 21$. Это эквивалентно $3x+5y+7z < 7$

$3x^2+5y+7z < 7(x+y+z)$ т.к. каждый из коэффициентов $3; 5; 7 \leq 7$

$$\text{Но } 7(x+y+z) < 7 \cdot 1 = 7$$

$$3x+5y+7z < 7$$

$$\text{Тогда } a^2 + b^2 + c^2 < 14+3x+5y+7z < 14+7 = 21$$

$a^2 + b^2 + c^2 < 21$, что противоречит условию.

Значит ~~брак~~ $a+b+c < 7$ неверно. Следовательно $a^2 + b^2 + c^2 \geq 7$

У.м.г.

Задача 5.

гипотенуза
не обязан
быть *прямоугольником*

Решение:

Пусть точка K - середина PQ

Покажем, что K лежит на BD :

Пусть O - центр окружности, M и N - середины DA и BC соответственно. Тогда $OM \perp DA$ и $ON \perp BC$?

Т.к. $DP \perp DA$, то D - середина $AP \Rightarrow MD$ - средний перпендикуляр $\triangle DAP$

