Шифр 08097

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
14	19.03	Каряшева Е.Е.	[illegible]

№4

1	2	3	4	5	Σ
7	0	0	7	0	14

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2}, \quad 0 < b < \frac{1}{2} \\ b^2 - a^2 > b - a \end{cases}$$

Доказать, что и $b^3 - a^3 > b - a$

$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ и $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

$(b-a)(b+a) > b - a$, значит: $(b-a)(b+a) - (b-a) > 0$

$(b-a)(b+a-1) > 0$. Но т.к. $a < \frac{1}{2}$ и $b < \frac{1}{2}$, то $b + a - 1 < 0$, из этого следует, что $b - a < 0$ и $b < a$

$(b-a)(b^2 + ab + a^2) > b - a$.

$(b-a)(b^2 + ab + a^2) - (b-a) > 0$

$(b-a)(b^2 + ab + a^2 - 1) > 0$. Мы уже доказали, что $b - a < 0$, значит $b^2 + ab + a^2 - 1$ должно быть меньше 0.

$b^2 + ab + ab - ab + a^2 - 1 = b^2 + 2ab - ab + a^2 - 1 = (b+a)^2 - ab - 1$.

$(b+a)^2 < 1$; значит $(b+a)^2 - ab - 1 < 0$

Т.к. в произведении $(b-a)(b^2 + ab + a^2 - 1)$ оба множителя отрицательны, то их произведение положительно.

А значит, $b^3 - a^3 > b - a$.

+

№ 1

Доказать, что число $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$ является составным.

$3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} = 3^{4046} + 2 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} -$

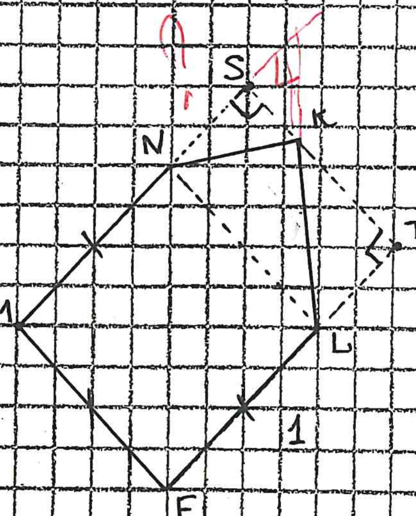
$- 3 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} = \left(3^{2023} + 5^{1012}\right)^2 - 3^{2024} \cdot 5^{1012} =$

$= \left(3^{2023} + 5^{1012}\right)^2 - \left(3^{1012} \cdot 5^{506}\right)^2 = \left(\left(3^{2023} + 5^{1012}\right) - 3^{1012} \cdot 5^{506}\right) \times$

$\times \left(\left(3^{2023} + 5^{1012}\right) + 3^{1012} \cdot 5^{506}\right)$

Итак, с помощью преобразовоний мы получили, что наше число можно представить как произведение двух других чисел, а следовательно, оно является составным.

№ 5



Дано:

MNKLF - выпуклый пятиугольник

$MN \perp KL$

$NK \perp LF$

$MN = MF = LF = 1$

Доказать: $NK + KL < 1$

Доказательство.

1) Продлим прямые MN и FL, проведём прямую ST, перпендикулярную MS и FT

Место для скобы

Шифр 08097

2) Тогда MSTF - прямоугольник

3) Проведем NL = 1 (т.к. NL = MF, из-за того, что MN = FL)

4) Получим треугольник NKL

Но по правилу треугольника: NK + KL < NL.

Т.к. NL = 1, то NK + KL < 1, что и требовалось доказать.

№3

Нам известно, что если сплавить 2 слитка, один из которых содержит золото, то мы получим сплав, содержащий 20% золота. А значит, каждый слиток, содержащий золото, содержит его не менее 20%.

Также известно, что если сплавить 2 слитка, оба из которых содержат золото, получится сплав, содержащий 30% золота. Следовательно, один из сплавов имеет в своём содержании от 20 (включительно)% до 30 (не включительно)% золота, а второй от 30% (не включительно) до 40% (включительно) золота.

Содержание золота в сплаве всех трёх брусков тогда: $(30+20+20):6 = 70:6 = 11\frac{2}{3}$

Ответ: $11\frac{2}{3}$%.