Шифр 08105

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
14	19.03	Корякова Е.Е.	[подпись]

1	2	3	4	5	Σ
0	5	0	7	2	14

№ 4

1) $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$

2) $b^2 - a^2 > b - a$

$(b-a)(b+a) > b-a$

$(b-a)(b+a) - (b-a) > 0$

$(b-a)(b+a-1) > 0$

$b + a < 1$ (по условию) $\Rightarrow$

$b - a < 0$

$b^3 - a^3 > b - a$

$(b-a)(b^2+ab+a^2) > b-a$

~~т.к $b-a<0$~~, $\Rightarrow$

~~$b^2+ab+a^2<0$~~

$(b-a)(b^2+ab+a^2) - (b-a) > 0$

$(b-a)(b^2+ab+a^2-1) > 0$

т.к $b - a < 0$, то

$b^2 + ab + a^2 - 1 < 0$

$b^2 + ab + a^2 < 1$, т.к

$0 < a < \frac{1}{2}$ и $0 < b < \frac{1}{2}$, то

$b^2 + ab + a^2 < \frac{3}{4}$,

следовательно

+ $b^3 - a^3 > b - a$ ЧТД

№ 1

$3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$

Пусть $x = 3^{2023}$

$y = 5^{1012}$

~~$x^2 - xy + y^2 = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y} = \frac{x^3+y^3}{x+y} = (x^3+y^3)\cdot(x+y)^{-1}$~~

~~$3^{4046} - 3^{2023}\cdot 5^{1012} + 5^{2024} = ((3^{2023})^3 + (5^{1012})^3)\cdot(3^{2023}+5^{1012})^{-1}$~~

число делится не только на 1 и само себя, = составное скобы

Шифр 08105

№ 3 (продолжение)

$x^2 - xy + y^2 =$

$= (x+y)^2 - 3xy =$

$= \left((x+y) - \sqrt{3xy}\right)\left((x+y) + \sqrt{3xy}\right)$

$x+y$ – натуральное

$\sqrt{3xy} = \sqrt{3 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012}} = \sqrt{3^{2024} \cdot 5^{1012}} = 3^{1012} 5^{506}$ – также натуральное число

№ 2

$t^4 - 2\sqrt{13}\,t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$

~~$(t^2 - \sqrt{13})^2 + t - \sqrt{13} = 0$~~

$13 - \sqrt{13}(2t^2+1) + t^4 + t = 0$

$\left(13 - 2\sqrt{13} \cdot \frac{(2t^2+1)}{4}\right) - \frac{(2t^2+1)^2}{4} + t^4 + t = 0$

$\left(\sqrt{13} - \frac{2t^2+1}{2}\right)^2 - \frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{4} + t^4 + t = 0$

$\left(\sqrt{13} - \frac{2t^2+1}{2}\right)^2 - t^4 - t^2 - \frac{1}{4} + t^4 + t = 0$

$\left(\sqrt{13} - \frac{2t^2+1}{2}\right)^2 - \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) = 0$

$\left(\sqrt{13} - \frac{2t^2+1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\left(\sqrt{13} - \frac{2t^2+1}{2} - t + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{13} - \frac{2t^2+1}{2} + t - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} -2t^2 - 1 + 1 - 2t + 2\sqrt{13} = 0 \\ -2t^2 - 1 - 1 + 2t + 4\sqrt{13} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} -2t^2 - 2t + 2\sqrt{13} = 0 \\ -2t^2 + 2t - 2 + 2\sqrt{13} = 0 \end{array}\right.$

Место для скобы

Шифр 08105

№ 2 (продолжение)

$$\left[\begin{array}{l} t^2+t-\sqrt{13}=0 \\ t^2-t+1-\sqrt{13}=0 \end{array}\right.$$

1) $t^2+t-\sqrt{13}=0$

$D=1+4\sqrt{13}$

$t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{13}}}{2}$

2) $t^2-t+1-\sqrt{13}=0$

$D=1-4\cdot1(1-\sqrt{13})=$

$=1-4+4\sqrt{13}=4\sqrt{13}-3$

$t_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2}$

Ответ: $t_1=\dfrac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$?

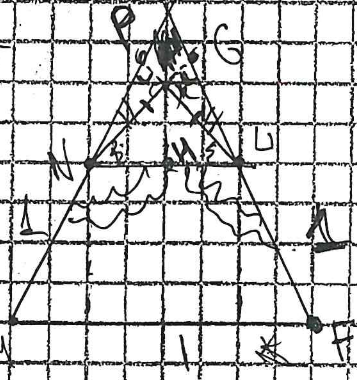
$t_2=\dfrac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$?

$t_3=\dfrac{1+\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2}$

$t_4=\dfrac{1-\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2}$?

$\pm$

№ 5



Дано:

$MN\perp KL$

$NK\perp LF$

$MN=MF=LF=1$

Док-ть:

$NK+KL<1$

Доказательство:

$\angle PKN=\angle GKL$ (как вертикальные) $\Rightarrow$

$\angle PNK=\angle GLK$

проведем NL $\quad\angle KNL=\angle KLN\Rightarrow$

$\angle LNM=\angle NLF\Rightarrow\angle NMF=\angle LFM\Rightarrow$

$NLFM$ – равнобедренная трапеция

Место для скобы

Шифр 08105

№5 (продолжение)

$KL = \sqrt{}$

KH - высота △ KNL

NK = KL, т.к. △ KNL - равнобедренный

$NK = KL = \sqrt{KH^2 + HL^2}$