Шифр 08086

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
11	20.03	Корецкая Е.Е.	

№4

$\cos(2x)+\cos^{2023}(2x)+2024\cdot\cos^{2025}(2x)=\sin x+\sin^{2023}(x)+2024\cdot\sin^{2025}(x)$

Заметим схожесть левой и правой части. Исходя из этого $\cos(2x)=\sin(x)$, т.к. подставив в левую часть $\sin x$ вместо $\cos(2x)$ получим одинаковые части, а если подставить $\cos(2x)$ вместо $\sin x$, то тоже получим одинаковые части

$\cos(2x)=\sin x$ подобщение.

1	2	3	4	5	Σ
2	3	0	4	2	11

$\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x=0$

$1-\sin^2 x-\sin^2 x-\sin x=0$

$-2\sin^2 x-\sin x+1=0 \quad |\cdot(-1)$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

Замена $\sin x=t$

$2t^2+t-1=0$

$D=\cancel{\ldots}\ 1-4\cdot2\cdot(-1)=9$

$t_1=\frac{-1-\sqrt9}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1 \qquad t_2=\frac{-1+\sqrt9}{2\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac12$

ВК 3

$\sin x=-1 \qquad\qquad \sin x=\frac12$

$x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ k\in z \qquad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ k\in z$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ k\in z$

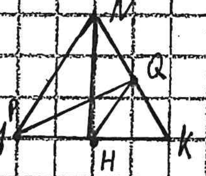
Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ k\in z$ ✓

Место для скобы

Шифр 08086

№5

Рассмотрим максимальную длину PQ



Дано: $PH = HQ$; $S = 1$

Найти: PQ

Решение

1) $S = NH \cdot HK$. По теореме Пифагора $HN = \sqrt{NK^2 - HK^2}$

Зная, что треугольник равностор. то NH - высота и медиана

$HK = \frac{1}{2} NK \Rightarrow NK = 2HK \Rightarrow HN = \sqrt{4HK^2 - HK^2} = HK\sqrt{3}$

$S = HK \cdot HK\sqrt{3} = HK^2\sqrt{3}$

$HK^2\sqrt{3} = 1 \Rightarrow HK = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow NK = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ ✓

$MQ = PQ$

2) Точка P совпадает ? с точкой M - тогда $MH = HQ = HK$

3) Т.к. $HQ = HK$, то ΔHQK - равнобедр. $\Rightarrow \angle K = \angle KQH = 60°$,

тогда ΔHQK - равностор. и Q - центр NK

4) Зная, что Q - центр MK $\Leftrightarrow$ MQ - медиана и высота $\Rightarrow \angle MQK = 90°$

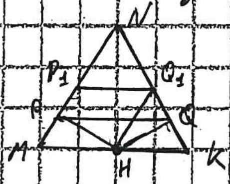
5) По теореме Пифагора $MQ = \sqrt{MK^2 - QK^2} = QK\sqrt{3}$ т.к. $QK = \frac{1}{2} MK$

$MQ = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{3}$

При перемещении точки P ближе к точке N, точка Q будет перемещаться ближе к точке K. Сначала длина PQ будет уменьшаться, но когда точки P и Q будут параллельны MK длина будет минимальна. В этот момент PQ будет средней линией трапеции состоящей из MK и средней линии треугольника MNK

Шифр 08086

Найдем минимальную длину



Дано: $PH = HQ$ $S=1$

Найти: PQ

Решение

1) Из предыдущего решения HQ_1K – равностор. $MK = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

Кратчайшее расстояние между точкой и прямой – перпендикуляр

$HQ \perp Q_1K$. Т.к. HQ_1K – равностор, то HQ – высота и медиана,

тогда $Q_1Q = QK \Rightarrow PQ$ – средняя линия трапеции P_1Q_1KM

2) P_1Q_1 – сред. линия треуг. MNK $P_1Q_1 = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

3) $PQ = \frac{P_1Q_1 + MK}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2}$ – эту длину нельзя

брать т.к. $PQ \parallel MK$

Ответ $PQ \in [\sqrt[4]{3}; \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2})$

№1

~~Цифр~~ Сумма цифр никогда не будет больше самого числа,

значит ~~отношение от~~ минимальное возможное отношение

это 1, тогда сумма должна быть равна числу

$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a + b + c + d$

$a \cdot 1000 - a + b \cdot 100 - b + c \cdot 10 - c + d - d = 0$

$a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9 = 0$

Подставим минимальное натуральное число 1

$1 \cdot 999 + 1 \cdot 99 + 1 \cdot 9 = 1107$

Ответ: 1107

Место для скобы

Шифр 08086

№ 2

$y^2 - x^2 > y - x$

$(y-x)(y+x) > y-x$

Зная $0 < x < \frac{1}{2}$; $0 < y < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow (y+x) < 1$ и $(y+x) > 0$

При умножении числа на число от 0 до 1, модуль первого числа уменьшится $\Rightarrow |y-x| \cdot (y+x) < |y-x|$, тогда $(y-x) < 0$?!

$y^3 - x^3 > y - x$

$y^3 - x^3 - 3xy^2 + 3x^2y > (y-x) - 3xy^2 + 3x^2y$

$(y-x)^3 > (y-x) - 3xy(y-x)$

$(y-x)^3 > (y-x)(1-3xy)$

$(y-x)^2 < 1 - 3xy$ т.к. $(y-x) < 0$

$(0-0)^2 < (y-x)^2 < (0-\frac{1}{2})^2$

$0 < (y-x)^2 < \frac{1}{4}$

~~зн~~ $3 \cdot 0 \cdot 0 < 3xy < 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$0 < 3xy < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} < (1-3xy) < 1$

Т.к. значение слева ~~больше~~ меньше $\frac{1}{4}$, а справа больше $\frac{1}{4}$, то

$y^3 - x^3 > y - x$ — истина

I