

| Общий балл | Дата     | Ф.И.О. Жюри | Подпись   |
|------------|----------|-------------|-----------|
| 115        | 13.03.25 | Лукина Н.А. |           |
| Шифр       |          |             | 025-2-М-5 |

### Задание 5.

Да, прямая  $BD$  делит отрезок  $PA$  пополам.

Доказательство:

1. Рассмотрим углы:  $\angle DAB = \angle DCB$  (как опирающиеся на одну и ту же дугу окружности).

$\angle DAP = \angle ADP$  (т.к. треугольник  $ADP$  - равнобедренный,  $PA = DP$ )

$\angle CBA = \angle CDB$  (т.к. треугольник  $CBA$  - равнобедренный,  $CB = BA$ )

2. Выразим углы:

$$\angle PAB = \angle DAB - \angle DAP$$

$$\angle QCB = \angle DCB - \angle QCD$$

3. Подставим равенства углов:

$$\angle PAB = \angle DCB - \angle ADP$$

$$\angle QCB = \angle DAB - \angle QCD$$

4. Учитывая, что

$$\angle DAB = \angle DCB$$

$$\angle PAB = \angle DAB - \angle ADP$$

$$\angle QCB = \angle DAB - \angle QCD$$

5. Рассмотрим треугольники  $APB$  и  $CQB$

$\angle APB = \angle CQB$  (как опирающиеся на одну и ту же дугу окружности)

$\angle CBD = \angle CAD$  (как опирающиеся на одну и ту же дугу окружности)

6. Докажем подобие треугольников  $APB$  и  $CQB$

$$\angle PAB = \angle QCB \text{ (доказано выше)}$$

$$\angle ABP = \angle ABC - \angle CBA = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC - \angle CAD = \angle QCB$$

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр 025-2-11-5

$$\angle CBA = \angle CBA - \angle ADB = \angle ABC - \angle ADB$$

П.к.  $\angle ADC = \angle ABC$  (четырёхугольник вписан) и  $\angle CBA = \angle CAB$  и  $\angle ADB = \angle DAB$ , то  $\angle ABC = \angle CDA$ .

Следовательно, треугольники  $ABD$  и  $CAE$  подобны по двум углам.

7. Пусть точка  $D$  - точка пересечения  $BD$  и  $CA$ . Из подобия  $\triangle ABD$  и  $CAE$  следует, что отношение расстояний от точек  $B$  и  $C$  до прямой  $AD$  одинаково.  $\Rightarrow$  точка  $D$  делит отрезок  $BC$  в том же отношении, в котором  $AD$  делит  $AC$ .

8. Рассм. проекции точек  $B$  и  $C$  на прямую  $AD$ . Пусть  $B'$  и  $C'$  - проекции  $B$  и  $C$  соответственно.  $\Rightarrow \frac{DB'}{DA} = \frac{DC'}{DA}$

9. Докажем, что  $DB = DC$ . П.к.  $\triangle ABD$  и  $CAE$  подобны, то  $\frac{AB}{CA} = \frac{AD}{CE}$ . Также  $BA = DB$  и  $CA = CE$ . Из этих соотношений можно показать, что  $DB = DC$ .

10. Вывод. П.к.  $DB = DC$ , то точка  $D$  является серединой отрезка  $BC$ .  $\Rightarrow$  прямая  $AD$  делит отрезок  $BC$  пополам.

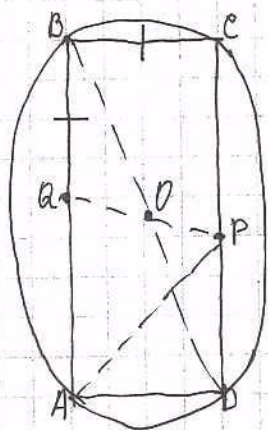


Рисунок:

чертежи нетерпим

Задание 2.

Доказательство:

Рассм. функцию  $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$  при условиях  $a \geq 1, b \geq 2$ ,

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр 025-2-М-5

$$c \geq 3$$

Предположим, что  $a+b+c < 7$ . Тогда:

$$a < 7 - b - c \leq 7 - 2 - 3 = 2.$$

П.к.  $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ , то:  $a^2 < 4, b^2 < (7-a-c)^2 \leq (7-1-3)^2 = 9$ ,

$$c^2 < (7-a-b)^2 \leq (7-1-2)^2 = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 4 + 9 + 16 = 29.$$

Однако это не противоречит условию  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ .

Рассм. функцию  $g(a, b, c) = (a+b+c)^2$ .

$$g(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 21 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Если  $a+b+c < 7$ , то  $(a+b+c)^2 < 49$ .

Предположим, что  $a=1, b=2, c=3$ . Тогда  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 9 = 14 < 21$ .

Если  $a=1, b=2, c=4$ , то  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 16 = 21$ . В этом случае  $a+b+c = 7$ .

Предположим, что  $a+b+c < 7$ . Тогда  $a < 7-b-c, b < 7-a-c, c < 7-a-b$ .

Следовательно:

$$a^2 + b^2 + c^2 < (7-b-c)^2 + b^2 + c^2.$$

Допустим противное:  $a+b+c < 7$ . Тогда

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) < 49.$$

П.к.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ .

$$2(ab+ac+bc) < 49 - 21 = 28.$$

$$ab+ac+bc < 14.$$

Однако, если  $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ , то  $ab+ac+bc \geq 2+3+6 = 11$ .

Пусть  $a+b+c = 7-\varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Тогда:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = (7-\varepsilon)^2 - 2(ab+ac+bc) \geq 21$$

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр 025-2-М-5

$$49 - 14\varepsilon + \varepsilon^2 - 2(ab + ac + bc) \geq 21$$

$$2(ab + ac + bc) \leq 28 - 14\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$ab + ac + bc \leq 14 - 7\varepsilon + \varepsilon^2$$

Таким образом, если  $a+b+c \leq 7$ , то  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ , что противоречит условию.

Следовательно,  $a+b+c \geq 7$ .

Задача 1.

1. Преобразуем уравнение  $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$ , чтобы получить выражение, похожее на квадрат суммы или разности.

Умножим обе части уравнения на 3:

$$3x^2 + 3y^2 = 10xy$$

2. Перенесём все члены в одну сторону:

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$$

3. Разложим квадратное урав. на множители относительно  $x$  (или  $y$ , это не имеет значения)

$$(3x - y)(x - 3y) = 0$$

$$3x - y = 0 \quad \text{или} \quad x - 3y = 0$$

$$y = 3x \quad \text{или} \quad x = 3y$$

4. По условию  $x > y$ .

• Если  $y = 3x$ , то это противоречит усл.  $x > y$ , т.к.  $3x > x \Rightarrow$  не проходит.

• Если  $x = 3y$ , то это удовлетворяет усл.  $x > y$ .

5. Таким образом,  $x = 3y$ . Теперь подставим:

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр 025-2-11-5

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2.$$

Ответ:  $\frac{(x+y)}{(x-y)} = 2.$

Задача 3.

Обозначим произведение как  $P$ .

$$P = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{99} = P_n = a_n = P_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}.$$

$$1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} \quad \checkmark$$

$$n^4 + 2n^3 - 2n - 1 = (n^3 + n^2 + n + 1)(n - 1) + n^3 + n^2 + n + 1 - 2n - 1 = (n^3 + n^2 + n + 1)(n - 1) + n^3 + n^2 - n.$$

При  $n = -1$ ,  $n^4 + 2n^3 - 2n - 1 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$ , и при  $n = -1$ ,  $n^3 + n^2 - n + 1 = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$ . т.е.  $n = -1$  является корнем.  $\Rightarrow$

$$n^4 + 2n^3 - 2n - 1 = (n + 1)(n^3 + n^2 - n - 1) = (n + 1)(n^2(n + 1) - (n + 1)) = (n + 1)(n + 1)(n^2 - 1) = (n + 1)^2(n - 1)(n + 1) = (n + 1)^3(n - 1). \text{ Итак,}$$

$$a_n = \frac{(n + 1)^3(n - 1)}{n^4}.$$

$$P = \frac{(n + 1)^3(n - 1)}{n^4} = \frac{(n + 1)^3}{n^4} = (n - 1).$$

$$P = (n + 1)^3 = (345 \dots 100)^3 = \left(\frac{100!}{2!}\right)^3$$

$$P = n^4 = (234 \dots 99)^4 = (99!)^4$$

$$P = n - 1 = (23 \dots 98) = 98!$$

$$P = \left(\frac{100!}{2!}\right)^3 \cdot \frac{98!}{(99!)^4} = \frac{(100!)^3}{(2 \cdot 99!)^3} \cdot \frac{98!}{99!} \cdot \frac{1}{(99!)^2} = \frac{125}{990} \cdot \frac{25}{798}.$$

Итак;  $P = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{99} = \frac{25}{198}.$

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр 025-2-И-5

Ответ:  $\frac{25}{198}$

Задача 4.

По теореме Вьетта, их сумма равна  $-p$ , а произведение  $-\frac{1}{2}p^2$ .

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2px_1 x_2$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2} \quad p \neq 0, \text{ проанализируя знаки и поведение}$$

прямой производной этого выражения, используя  
значения корней.

Таким образом, неравенство верно для любых значений  
 $p \neq 0$ .

15