

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
24	21.03	Корсаков Е.Е.	М

$$4. \cos 2x + \cos^{2023} 2x + 2024 \cos^{2025} 2x = \sin x + \sin^{2023} x + 2024 \sin^{2025} x$$

Замена: $\cos 2x = m$; $\sin x = n$

$$m + m^{2023} + 2024 m^{2025} = n + n^{2023} + 2024 n^{2025}$$

Введем функцию $f(t)$:

$$f(t) = t + t^{2023} + 2024 t^{2025}$$

$$f'(t) = 1 + 2023 t^{2022} + 2024 \cdot 2025 t^{2024} > 0$$

Трехчленная положительна при любых $t \Rightarrow$ функция возрастает

$$f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$$

Сделаем обратную замену:

$$\cos 2x = \sin x$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \sin x \quad 1 - 2 \sin^2 x = \sin x$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Замена: $\sin x = t, -1 \leq t \leq 1$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

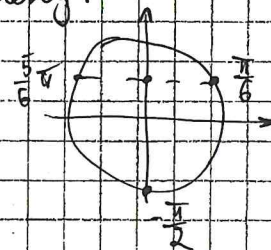
$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$t = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$$2 \quad 0 < x < \frac{1}{2} ; 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$y^2 + x^2 > y - x$$

$$(y-x)(y+x) - y + x > 0$$

$$(y-x)(y+x-1) > 0$$

$$x < \frac{1}{2} ; y < \frac{1}{2} \Rightarrow y+x < 1$$

$$y+x-1 < 0 \Rightarrow y-x < 0, \text{ т.е. } y < x$$

$$0 < y^2 < \frac{1}{4} \quad | \Rightarrow y^2 + x^2 < \frac{1}{2} ; xy < \frac{1}{4}$$

$$xy < \frac{1}{4}$$

$$y^2 + x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 + x^2 - 1 < -\frac{1}{2}$$

$$y^2 + x^2 - 1 + xy < -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$y^2 + xy + x^2 - 1 < -\frac{1}{4} \Rightarrow y^2 + xy + x^2 - 1 < 0$$

$$y-x < 0$$

$$y^2 + xy + x^2 - 1 < 0 \Rightarrow (y-x)(y^2 + xy + x^2 - 1) > 0$$

$$\text{т.е. } y^3 - x^3 > y - x \quad \text{т.е. } y$$

$$1 \quad \frac{abcd}{a+b+c+d} - \min$$

$$\frac{1000a+100b+0c+d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d+999a+99b+9c}{a+b+c+d} = 1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}$$

$$1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d} - \text{минимально, при максимальном } d, \text{ т.е.}$$

$$1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c} = 1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c} = 1 + \frac{9a+9b+9c+81+990a+90b-81}{a+b+c+9} =$$

$$= 1 + 9 + \frac{990a+90b-81}{a+b+c+9} - \text{минимально, при максимальном } a, \text{ т.е.}$$

$$10 + \frac{999a + 90b - 8}{a+b+18}$$

$$10 + \frac{999a + 90b - 8}{a+b+18} = 10 + \frac{90a + 90b + 90 \cdot 18 + 990a - 81 + 90 \cdot 18}{a+b+18}$$

$$= 10 + 90 + \frac{999a - 90 \cdot 18 - 81}{a+b+18} = 100 + \frac{999a - 1701}{a+b+18} \quad \text{— целым числом при}$$

$$999a - 1701 < 0$$

$$a+b+18 \text{ — делим.}$$

$$a+b+18 \text{ — делим, при } a=1 \text{ и } b=0$$

$$\text{при } a=1: 999 - 1701 \quad 999 - 1701 < 0$$

значит целое число: 1099

$$3. \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P(1) = P(101) = 2024 \quad -999 < a_0 < 999$$

$$\frac{a_0 - 2024}{a_n} \approx 17, \quad \frac{a_0 - 2024}{a_n} \approx 191 \Rightarrow \frac{a_0 - 2024}{a_n} \approx 1717$$

$$a_0 \approx 1717a_n + 2024$$

красиво!

$$-999 < 1717a_n + 2024 < 999$$

$$-3023 < 1717a_n < -1025 \Rightarrow a_n = -$$

$$a_0 \approx 2024 - 1717 = 307$$

ответ: 307