

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
22		Корсаков	М
Шифр			042031

$$N1 \quad (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

Введу значение функции: $f = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$

Для того чтобы найти минимальное значение, исследую функцию при помощи производной.

Рассмотрю значение производной относительно каждой переменной.

1. Относительно a

$$f'(a) = 2(7+a-b) \cdot (7+a-b)' + 2(2+b-c) \cdot (2+b-c)' + 2(9+c-a) \cdot (9+c-a)'$$

т.к. я рассматриваю производную относительно переменной a , то $(2+b-c)' = 0$ т.к. " c " и " b " в данном случае рассматриваются как константы, производная которых равна нулю.

$$(7+a-b)' = 1; \quad (9+c-a)' = -1$$

$$f'(a) = 2(7+a-b) \cdot 1 + 2(9+c-a) \cdot (-1) = 14 + 2a - 2b - 18 - 2c + 2a = 4a - 2b - 2c - 4$$

2. Аналогично для переменной b

$$f'(b) = 2(7+a-b) \cdot (-1) + 2(2+b-c) \cdot 1 + 2(9+c-a) \cdot 0 =$$

$$= -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 10$$

3. Аналогично для переменной c

$$f'(c) = 2(7+a-b) \cdot 0 + 2(2+b-c) \cdot (-1) + 2(9+c-a) \cdot 1 = -4 - 2b + 2c + 18 + 2c - 2a =$$

$$= -2a - 2b + 4c + 14$$

Минимальное значение будет при условии:

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b - c - 2 = 0 \\ -a + 2b - c - 5 = 0 \quad |(-1)| \\ -a - b + 2c + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 2 \quad (1) \\ a - 2b + c = -5 \quad (2) \\ -a - b + 2c = -7 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) : \begin{cases} 3a - 3b = -3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = b - 1$$

Подставлю значение a в (1): $2(b-1) - b - c = 2$

$$2b - 2 - b - c = 2$$

$$b = c + 4$$

Выражу букву " a " через " c "

$$a = b - 1$$

$$a = c + 4 - 1$$

$$a = c + 3$$

Подставлю полученные значения в начальное выражение:

$$(7 + c + 3 - c - 4)^2 + (2 + c + 4 - c)^2 + (9 + c - c - 3)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108$$

Ответ: 108

вар-т, нех! $\neq$

N2 $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$ $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$

Замечу что: $(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1)x^2 = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2$

Произведу замену: $P(x) = Q(x) \cdot x^2 - x + 506$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 + 506 - x_2 + 506 - x_3 + 506 - x_4 + 506 =$$

$$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$$

Для того чтобы найти значение $-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ распишем

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \quad (\text{это можно считать ф.к. по условию})$$

x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями $Q(x)$

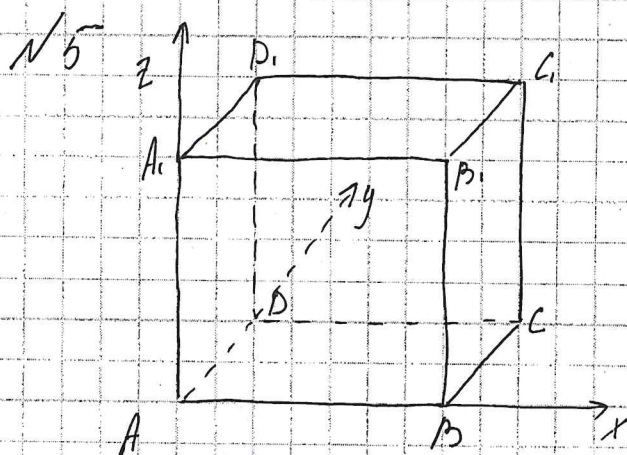
$$Q(x) = (x^2 - x x_2 - x x_1 + x_1 x_2)(x^2 - x x_4 - x x_3 + x_3 x_4) = x^4 - x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \dots$$

$$-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 1 \quad (\text{коэффициенты равны})$$

Подставим и получим $P = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024 = 1 + 2024 = 2025$

Ответ: 2025

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			



Дано: $\alpha \perp A_1C_1$; $\beta \parallel CD_1$

Найти: $\angle \beta$

Решение:

1. Введем систему координат.

2. $A_1(0;0;1)$
 $C_1(1;1;1) \Rightarrow \vec{A_1C_1} = \{1;1;0\}$

т.к. по условию $A_1C_1 \perp \alpha \Rightarrow$ этот вектор является вектором нормали к плоск. α .
 $\vec{n}_\alpha = \{1;1;0\}$

3. $C(1;1;0)$
 $D_1(0;1;1) \Rightarrow \vec{CD_1} = \{-1;0;1\}$ данный вектор по условию перпендику-

лярен $\beta \Rightarrow$ вектором нормали к данной

плоскости, будет являться любой вектор перпендику-

лярный $\vec{CD_1}$ $\left(\begin{array}{l} \vec{n}_\beta \perp \beta \\ \vec{CD_1} \parallel \beta \end{array} \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{CD_1} \right)$

3. Возьмем вектор $\vec{BC}$

Но что вектор $\vec{BC} \perp \vec{CD_1}$ можно доказать через скалярное произведение

$\vec{BC} = \{0;1;0\}$ $\vec{CD_1} = \{-1;0;1\}$

$\vec{BC} \cdot \vec{CD_1} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ данные векторы перпендикуля-

рны. $\Rightarrow \vec{BC}$ вектор нормали к $\beta \Rightarrow \vec{n}_\beta = \{0;1;0\}$ ~~нет~~.

4. Угол между плоскостями находится как угол между норма-

$\vec{n}_\alpha = \{1;1;0\}$

$\vec{n}_\beta = \{0;1;0\}$?

$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Получаем, что $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$ ~~нет~~
 Ответ: 45° ~~х~~

№3 $x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$

Рассмотрю первую часть выражения при помощи функции.

$$f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$$

Пусть $\sqrt{x^2+1} = t$

$$x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1$$

$$f(t) = t^2 - 1 - 6t + 11$$

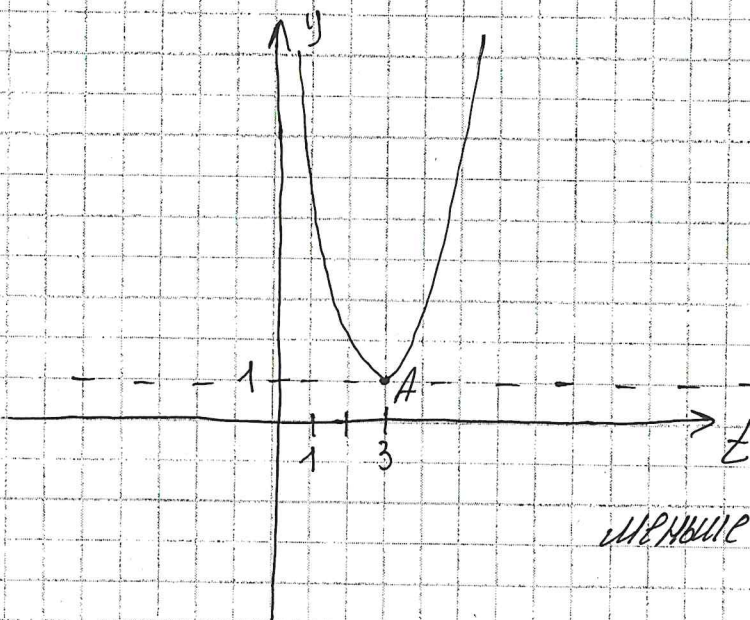
$$f(t) = t^2 - 6t + 10$$

Построю график данной функции

Вершина $\frac{6}{2} = 3$

$$f(3) = 9 - 18 + 10 = 1$$

$$A(3; 1)$$



Из графика видно, что
 наша функция не
 принимает значений
 меньше 1.

Следует, что $x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \geq 1$

Рассмотрю правую часть выражения:

по определению косинуса $-1 \leq \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{13} \leq 1$

Т.к. я выяснила, что левая часть всегда больше или равна 1, а правая часть принадлежит промежутку $[-1; 1]$, то их равенство возможно только в том случае, когда обе части равны 1.

$$(4) \quad x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 10 = 0$$

$$t^2 - 1 - 6t + 10 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t - 3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

Проведу обратную замену

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3 \quad |^2$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

Подставлю полученные корни в выражение с косинусом

$$(4) \quad x = \sqrt{8}$$

$$\cos \left(\frac{(\sqrt{8})^2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{13} \right) = \cos \left(\frac{8 + \sqrt{16} - 4}{13} \right) = \cos \left(\frac{8}{13} \right) = \cos \left(\frac{4}{9} \right) \neq 1$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$② \quad x = -\sqrt{8}$$

$$\cos\left(\frac{(-\sqrt{8})^2 + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{8}) - 4}{13}\right) = \cos\left(\frac{8 - 4 - 4}{13}\right) = \cos\left(\frac{0}{13}\right) = \cos 0 =$$
$$= 1 \quad (\text{удовлетворяет})$$

Ответ: $x = -\sqrt{8}$

X