

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
135	13.03.25	Лугинский Н.В.	<i>[Подпись]</i>
Шифр 025-2-М-51			

1. $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$. Сделаем из этого два уравнения, прибавив / убавив $2xy$

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{10xy}{3} + 2xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{10xy}{3} - 2xy$$

По ФСУ: $(x+y)^2 = \frac{16xy}{3}$ ✓

$$(x-y)^2 = \frac{4xy}{3}$$
 ✓

x и $y > 0 \Rightarrow$ ограничений из-за квадратов и корней нет.

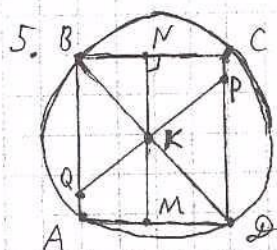
$$x+y = 4\sqrt{\frac{xy}{3}}$$
 ✓

$$x-y = 2\sqrt{\frac{xy}{3}}$$
 ✓

Мы отдельно получили $x+y$ и $x-y$. Подставим:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{4\sqrt{\frac{xy}{3}}}{2\sqrt{\frac{xy}{3}}} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: 2



Дано: $ABCD$ - четырёхугольник, вписан в окруж.,

$DP \in DC$, $BQ \in BA$. $DP = DA$, $BQ = BC$, $BD \cap QP = K$

Док-ть: $QK = KP$

Док-во: BD - диагональ и диаметр $\Rightarrow \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$

Проведем $KN \perp BC$ и $KM \perp AD$. $\angle KNC = \angle PCN = \angle QAM = \angle AMK = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AQKM$ и $CPKN$ - трапеции. $\angle QKM = \angle NKP$ (верт.). При угла

одной трапеции равны прилежащие углы другой $\Rightarrow \angle AQB = \angle CPD$, а они

накрест лежащие при QP -секундар $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - прямоугольник $\Rightarrow BC = AD = DP = BQ$ (из усл.).

$BQ = DP$, $\angle BQK = \angle DPK$ и $\angle QBK = \angle PDK$ (накр. лет.) $\Rightarrow \triangle BQK = \triangle DPK$ (по стороне

и двум углам) $\Rightarrow QK = KP$ - т.т.д.

2. $a \geq 1$ $b \geq 2$ $c \geq 3$ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$

Предположим, что $a=1$, $b=2$, т.е. имеют минимальные значения.

Тогда $c \geq 4$. Аналогично: если $b=2$, $c=3$, то $a \geq 3$; если $a=1$, $c=3$,

то $b \geq \sqrt{11}$, т.е. b явно > 3 .

Так, во всех случаях, когда два из чисел минимальны, их сумма

с третьим минимальным при данном условии $\geq 7 \Rightarrow a+b+c \geq 7$ - т.т.д.

($1+2+4=7$; $1+3+\sqrt{11} > 7$; $2+3+3=8$)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-51

3. Изначально я хотел найти $a_n = 0$:

$$n^4 + 2n^3 - 2n - 1 = 0$$

$$(n^2 - 1)(2n + n^2 + 1) = 0$$

но корни оказались не удовлетворяющие условию.

Тогда попытка найти закономерность в первых множителях, чтобы почти всё можно было сократить:

$$a_2 = \frac{3^2}{2^4} = \frac{3^2}{2^4} \quad a_3 = \frac{2^7}{3^4} \quad a_4 = \frac{3^7 \cdot 5}{4^4} = \frac{5^3 \cdot 3}{4^4} \quad a_5 = \frac{6^3 \cdot 4}{5^4}$$

$$\text{Так: } a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \frac{3^2}{2^4} \cdot \frac{4^3 \cdot 2}{3^4} \cdot \frac{5^3 \cdot 3}{4^4} \cdot \frac{6^3 \cdot 4}{5^4} = \frac{6^3}{2^3 \cdot 5}$$

Выявив закономерность, можно сказать, что

$$a_{99} = \frac{100^3 \cdot 98}{99^4} \quad a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99} = \frac{100^3}{2^3 \cdot 99}$$

$$\text{Ответ: } \frac{100^3}{2^3 \cdot 99} = \frac{125000}{99} \checkmark$$

45

4. Я пытался выразить x_1 и x_2 через p , но времени уже не хватило.