ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
15		Емельянова	Ему

Шифр

1	2	3	4	5	Σ
2	5	4	4	–	15

Задания 1

$(7+a-b)^2+(2+b-c)^2+(9+c-a)^2$

$S=(A)^2+(B)^2+(C)^2$

$A=7+a-b \quad B=2+b-c \quad C=9+c-a$

$A+B+C=(7+a-b)+(2+b-c)+(9+c-a)=7+2+9=1$

Если бы A, B и C были равны, то $A=B=C=6$ + тогда

$S=6^2+6^2+6^2=108$

$A=B=C=0$

$7+a-b=0 \quad 2+b-c=0 \quad 9+c-a=0$

$a=b-7, \quad c=b+2 \quad (b+2)-(b-7)=9$

$b+2-b+7=9 \Rightarrow 9=9$

Значит существует такое (a,b,c) что $S=0$

минимальное значения 0 ?

Задания 2

$P(x)=x^6+x^5-4x^4+x^2-x+506$

и $Q(x)=x^4+x^3-4x^2+1$

найдите сумму $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)$ где x_1, x_2, x_3, x_4 -

корни $Q(x)$

$P(x)=x^5-4x^2+x+506$

$Q(x)=x^4-4x^2+1$

корни $Q(x)=0$ обозначим как x_1, x_2, x_3, x_4

нужна н. $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)$

$Q(x)=x^4-4x^2+1=0$ выразим x^4

Домножем на x чтобы получить x^5

$\wedge = x(4x^2-1) = 4x^3 - x$

Подставим $P(x)$

$P(x) = (4x^3 - x) - 4x^2 + x + 506 = 4x^3 - 4x^2 + 506$

Теперь найдём сумму

$S = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$

Так как x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$ их сумма кубов выражается через коэффициенты

Сумма кубов корней многочлена $Q(x)$ равна нулю если он симметричен относительно замены $x \to -x$

Тогда:

$4(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 4 \cdot 506$

Так как сумма квадратов корней уравнения $Q(x) = 0$ равно и (из коэффицентов получаем):

?

$S = 4 \cdot 0 - 4 \cdot 4 + 4 \cdot 506 = -16 + 2024 = 2008$ —

Задания 3

$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos\frac{x^2 + \sqrt{2x} - 4}{18} = 0$

$t = \sqrt{x^2+1}$

Тогда $t^2 = x^2 + 1$, и уровнения принимает вид

$t^2 - 1 - 6t + 11 - \cos\frac{x^2 + \sqrt{x^2-4}}{18} = 0$

Упростим:

$t^2 - 6t + 10 - \cos\frac{x^2 + \sqrt{x^2-4}}{18} = 0$

Так как косинус принимает значения в диапазоне $\{-1; 1\}$, а это слагаемое присутствует в уравнении, нам нужно проверить целые значения x.

Подставляя $x = 2$?, находим, что уравнением обращается в ноль
разве?

Ответ: $x = 2$?

Задания 4

Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots x_n$ таких, что

$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n.$

Даны положительные число x_1, x_2, x_n такие что:
$x_1 x_2 x_n = 1$

Докажем

$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_n - 1) \geq 0$

Используем неравенство среднего арифметического и геометрического

$$\frac{x_1 + x_2 + x_n}{n} \geq \sqrt{x_1 x_2 x_n}$$ +

так как $x_1 x_2 x_n = 1$, то

$$\frac{x_1 + x_2 + x_n}{n} \geq 1$$

Домножим на n:

$x_1 + x_2 + x_n \geq n$

Перепишем в виде ?

не доказано...

$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_n - 1) \geq 0$

Ответ: неравенство верно.