

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
16		Корженевская	И
Шифр			042033

1 задание

$$y = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

Возьму производную от каждой переменной (a, b, c)

$$y'(a) = 2(7+a-b) + 0 - 2(9+c-a) = 4a - 2b - 2c - 4 = 0$$

$$y'(b) = -2(7+a-b) + 2(2+b-c) + 2(9+c-a) = -2a - 2b + 4c + 14 = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 & (I) \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 & (II) \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 & (III) \end{cases}$$

Отниму (I) от (III)

$$4a - 2b - 2c - 4 + 2a + 2b - 4c - 14 = 0$$

$$6a - 6c - 18 = 0 \quad / : 6$$

$$a - c - 3 = 0$$

$$a = c + 3$$

Теперь подставлю значение a в (II)

$$-2(c+3) + 4b - 2c - 10 = 0$$

$$-2c - 6 + 4b - 2c - 10 = 0$$

$$4b - 4c - 16 = 0 \quad / : 4$$

$$b - c - 4 = 0$$

$$\begin{cases} b = c + 4 \\ a = c + 3 \\ c = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

где c любое число?

Теперь подставлю полученные значения в первоначальное выражение

$$y = (7+c+3-c-4)^2 + (2+c+4-c)^2 + (9+c-c-3)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 \cdot 3 = 108$$

Ответ: 108

1	2	3	4	5	Σ
5	5	3	0	3	16

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

3 задание

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$

$$\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \text{ по определению всегда } \leq 1$$

$$\geq -1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$$

При подстановке $\min x = 0$

$$0 - 6 + 11 = 5 \geq 1$$

$$y = x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$$

$$\sqrt{x^2+1} = t \quad x^2 = t^2 - 1$$

$$y_1 = t^2 - 1 - 6t + 11$$

$$y_2 = t^2 - 6t + 10$$

$$\begin{cases} t_0 = 3 \\ y_0(t) = 1 \end{cases}$$

$$t^2 - 6t + 10 = 1$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

$$\sqrt{x^2+1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

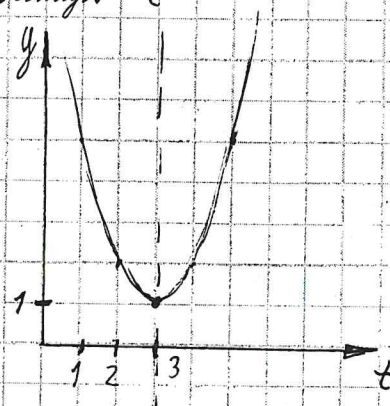
$$x^2 = 8$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\text{по } \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \text{ по оп. всегда } \begin{cases} \leq 1 \\ \geq -1 \end{cases}$$

т.е. тогда все уравнение примет вид

$$1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 1$$



Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Положив из тождественных умножений уравнение примет вид, при котором в одной вариации получится под:

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right) = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = 1$$

поиск решения.

$$\begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases} \text{ теперь функции аргументы подставим в косинус}$$

$$x = \sqrt{8} \quad \cos\left(\frac{8 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{18}\right) = \cos\left(\frac{6}{18}\right) \neq 1 \text{ не подходит}$$

$$x = -\sqrt{8} \quad \cos\left(\frac{8 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 4}{18}\right) = \cos\left(\frac{0}{18}\right) = \cos 0 = 1$$

$$\text{Ответ: } x = -\sqrt{8}$$

Задача 2

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

$$P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$$

поиск решения.

$$P(x) = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = x_1^2 \cdot Q(x_1) - x_1 + 506 + x_2^2 \cdot Q(x_2) - x_2 + 506 + x_3^2 \cdot Q(x_3) - x_3 + 506 + x_4^2 \cdot Q(x_4) - x_4 + 506$$

П. п. x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$, то можно представить так:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = (x^2 - x(x_2+x_3+x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ &= (x^2 - x(x_2+x_3+x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ &= x^4 - x^3(x_2+x_3+x_4) + x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - x(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$+ x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$Q(x) = Q(x)$$

$$1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$P(x_1)$$

Применяю метод неопределенных коэффициентов
для функции Лагранжа:

$$Q_{\lambda_1} = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$Q(x) = x^4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + x^2(x_1x_2 + x_1x_3 +$$

$$+ x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4)$$

$$+ x_1x_2x_3x_4$$

$$Q(x) = Q(x)$$

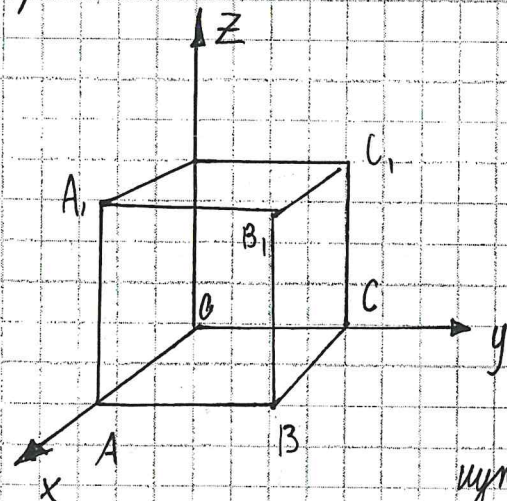
||

$$1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 2024 + 1 = 2025$$

Ответ: 2025

Задача 5



Дано: $\alpha \perp A_1C_1$

$\beta \parallel CD_1$

$$\widehat{\alpha\beta} = ? \text{ min}$$

Пусть ребро нашей фигуры будет a

Составим систему координат и найдем координаты
нужных точек

$$A_1 (a; 0; a)$$

$$C_1 (0; a; a)$$

$$C (0; a; 0)$$

$$\vec{A_1C_1} = \{-a; a; 0\}$$

$$C (0; a; 0)$$

$$D_1 (0; 0; a)$$

$$\Rightarrow CD_1 = \{0; -a; a\}$$

$$A_1C_1 \perp \alpha \Rightarrow A_1C_1 = \vec{n}, (\text{вектор нормали к } \alpha) \Rightarrow \vec{n} = \{-a; a; 0\}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\left. \begin{array}{l} \beta \parallel CD_1 \\ CD_1 \perp AD_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp AD_1 \Rightarrow AD_1 = \vec{n}_2 \text{ - вектор нормали к } \beta$$

$\vec{n}_2 \{ -\sqrt{2}; 0; 0 \}$

нет!

Угол между β и α равен углу между нормальными

$$\cos(\angle \vec{n}_2, \vec{n}_1) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\angle \beta, \alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ$$

Ответ: 60°

