

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
21		Емельянов	Ему
Шифр			02200

$$\frac{1}{7} - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} - \frac{4}{7} - \frac{5}{7} = -21$$

11

$$x > y; x > 0 \text{ и } y > 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

Найдем $\frac{x+y}{x-y}$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | + 2xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

м.к. $x > 0$ и $y > 0$, то $x+y > 0$ и $\frac{16}{3}xy > 0$

$$x+y = \sqrt{\frac{16}{3}xy}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{\frac{16}{3}xy}}{\sqrt{\frac{4}{3}xy}} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \quad | - 2xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy$$

м.к. $x > 0$ и $y > 0$ и $x > y$, то

$$x-y > 0 \text{ и } \frac{4}{3}xy > 0$$

$$x-y = \sqrt{\frac{4}{3}xy}$$

12

$$a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3 \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

Док-м, что $a+b+c \geq 7$.

13. Найдем $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{99}$

Рассмотрим $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n+1}{n} + \frac{(n^2-1)}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \\ &= \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)(n-1)}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right) = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3} \right) = \\ &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2(n+1)-(n+1)}{n^3} \right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n^2-1}{n} \right) = \frac{(n+1)^2(n-1)(n+1)}{n^4} = \\ &= \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} &= \left(\frac{(2+1)^3}{2^3} \cdot \frac{(2-1)}{2} \right) \cdot \left(\frac{(3+1)^3}{(2+1)^3} \cdot \frac{(3-1)}{3} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{(99+1)^3}{(98+1)^3} \cdot \frac{(99-1)}{99} \right) = \\ &= \frac{(2-1)}{2^3} \cdot \frac{(99+1)^3}{99} = \frac{1 \cdot 100^3}{8 \cdot 99} = \frac{1000000}{8 \cdot 99} = \frac{125000}{99} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{125000}{99}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

043620

44

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}; \quad p \neq 0$$

Док-м, что $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= \left((-p)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2} \right) \right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2} \right)^2 = \\ &= \left(p^2 + \frac{1}{p^2} \right)^2 - \frac{1}{p^4} = \frac{(p^4 + 1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^4} = \frac{p^8 + 2p^4 + 1}{p^4} - \frac{1}{p^4} = \\ &= \frac{p^8 + 2p^4 + 1 - 1}{p^4} = \frac{p^8 + 2p^4}{p^4} = \frac{p^8 + 1}{p^4} = 2 + \frac{2p^6 + 1}{2p^4} \end{aligned}$$

Докладываем, что $\frac{2p^6 + 1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$.

т.к. $p^4 \neq 0$, то выполняется, при условии, что $\frac{2p^6 + 1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$.

$2p^6 + 1 \geq 2p^4 \cdot \sqrt{2}$, если это верно, то верно и следующее

По нер-ву Коши $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

$$2p^6 + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{2p^6 \cdot 1}$$

$$2p^6 + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{2} \cdot p^4 \Rightarrow \frac{2p^6 + 1}{2p^4} \geq \sqrt{2} \Rightarrow 2 + \frac{2p^6 + 1}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2} \quad \text{н.т.д.}$$