КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

07028

Шифр

т	МАТЕМАТИКА
г	1
	10
ия	ДУНАЕВ
	АРТЁМ
о	АНДРЕЕВИЧ
ждения	20 (Число) 02 (Месяц) 2006 (Год)
пр: Томская обл., градская область)	Томская область
ципального образования *деревня, село, город)*	ГОРОД
ный пункт *(пр: Томск, о, Псков)*	ТОМСК
наименование ательного учреждения, ом Вы обучаетесь в время	ОГБОУ "ТФТЛ"

ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Шифр 07028

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
15 б.	27.03.23	Хмылёва Т.Е	[illegible]

1	2	3	4	5
7	–	–	7	1

Задание 1)

I) $y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0$

$y(y(y-x+2)-(x+4))+5x+7=0$

$y(y^2-xy+2y-x-4)+5x+7=0$

$y(y^2+2y-4-x(y+1))+5x+7=0$

$y((y+1)^2-5-x(y+1))+5x+7=0$

$y((y+1)(y+1-x)-5)+5x+7=0$

$y(y+1)(y+1-x)+5(x-y)=-7$

$y(y+1)(y-x)+y(y+1)+5(x-y)=-7$

$(y-x)(y(y+1)-5)+y(y+1)=-7$

$(y-x)(y(y+1)-5)+y(y+1)-5+5=-7$

$(y-x)(y(y+1)-5)+y(y+1)-5=-12$

$(y(y+1)-5)(y-x+1)=-12$

$(y^2+y-5)(y-x+1)=-12 \quad |:-1$

$(y^2+y-5)\cdot(x-1-y)=12$ ✓

конечно по этому мы будем рассматривать пары целых чисел.

II) 12 мы можем разложить на множители:

$\begin{bmatrix} 1\cdot 12 \\ 2\cdot 6 \\ 3\cdot 4 \\ 4\cdot 3 \\ 6\cdot 2 \\ 12\cdot 1 \end{bmatrix}$ как на положительные, так и на отрицательные $\begin{bmatrix} -1\cdot -12 \\ -2\cdot -6 \\ -3\cdot -4 \\ -4\cdot -3 \\ -6\cdot -2 \\ -12\cdot -1 \end{bmatrix}$

в итоге мы получаем 12 вариантов.

т.к. y и $x \in \mathbb{Z}$, то и выражения (y^2+y-5) и $(x-1-y)$ тоже $\in \mathbb{Z}$, они попросту не могут быть $\mathbb{R}$, т.к. в этих выражениях попросту нет чисел $\in \mathbb{R}$,

(1)

скобы

Шифр 07028

1 и 12:

$$\begin{cases} y^2+y-5=1 & (I) \\ x-1-y=12 & (II) \end{cases}$$

(I) $y^2+y-6=0$

$D = 1-4\cdot-6=25$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+5}{2}=2 \\ y_2=\frac{-1-5}{2}=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1=2 \Rightarrow x-1-2=12$

$x=15 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ первая пара $(15; 2)$ ✓

$y_2=-3 \Rightarrow x-1+3=12$

$x=10$

вторая пара $(10; -3)$ ✓

2 и 6:

$$\begin{cases} y^2+y-5=2 & (I) \\ x-1-y=6 & (II) \end{cases}$$

(I)

$y^2+y-7=0$

$D=1-4\cdot-7=1+28=29$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{29}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$ $\notin$ цел. $y\in\mathbb{Z}$

пара сразу отпадает.

-1 и -12:

$$\begin{cases} y^2+y-5=-1 & (I) \\ x-1-y=-12 & (II) \end{cases}$$

(I) $y^2+y-4=0$

$D=1-4\cdot-4=17$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$ эти два корня $\notin$ цел $y\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ что пара -1 и -12 сразу отпадает.

-2 и -6:

$$\begin{cases} y^2+y-5=-2 & (I) \\ x-1-y=-6 & (II) \end{cases}$$

(I) $y^2+y-3=0$

$D=1-4\cdot-3=13$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$ $\notin$ цел $y\in\mathbb{Z}$

пара отпадает.

скобы

Шифр 07028

3 и 4

$$\begin{cases} y^2+y-5=3 & \text{I} \\ x-1+y=4 & \text{II} \end{cases}$$

I

$y^2+y-8=0$

$D=1-4\cdot-8=33$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$ ~~усл.~~ не удов. усл. $y\in Z$

пара отпадает.

4 и 3:

$$\begin{cases} y^2+y-5=4 & \text{I} \\ x-1-y=3 & \text{II} \end{cases}$$

I $y^2+y-9=0$

$D=1-4\cdot-9=37$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{37}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$$ не удов. усл. $y\in Z$ ~~не удов. усл.~~

пара отпадает

-3 и -4

$$\begin{cases} y^2+y-5=-3 & \text{I} \\ x-1+y=-4 & \text{II} \end{cases}$$

I

$y^2+y-5=-3$

$y^2+y-2=0$

$D=1-4\cdot-2=9$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+3}{2}=1 \\ y_2=\frac{-1-3}{2}=-2 \end{array}\right.$$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_1=1$ тогда $x+1-1=-4$

$x=-2$

пара $(-2;1)$ V

$\Rightarrow y_2=-2$ тогда $x-1+2=-4$

$x=-5$

пара $(-5;-2)$ V

-4 и -3:

$$\begin{cases} y^2+y-5=-4 & \text{I} \\ x-1-y=-3 & \text{II} \end{cases}$$

I $y^2+y-1=0$

$D=1-4\cdot-1=5$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$ не удов. усл. $y\in Z$

пара отпадает

место для скобы

Шифр 07028

6 и 2: $\begin{cases} y^2+y-5=6 & \text{I} \\ x-1-y=2 & \text{II} \end{cases}$

I $y^2+y-11=0$

$D=1-4\cdot(-11)=45$

$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+3\sqrt{5}}{2} \\ y_2=\frac{-1-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ $\notin$ усл. $y\in\mathbb{Z}$

пара отпадала.

-6 и -2: $\begin{cases} y^2+y-5=-6 & \text{I} \\ x-1-y=-2 & \text{II} \end{cases}$

I $y^2+y+1=0$

$D=1-4\cdot1<0$ - корней нет

пара отпадает.

12 и 1: $\begin{cases} y^2+y-5=12 & \text{I} \\ x-1-y=1 & \text{II} \end{cases}$

I $y^2+y-17=0$

$D=1-4\cdot-17=69$

$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{69}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{69}}{2} \end{array}\right.$ $\notin$ усл. $y\in\mathbb{Z}$

пара отпадает

-12 и -1: $\begin{cases} y^2+y-5=-12 & \text{I} \\ x-1-y=-1 & \text{II} \end{cases}$

I $y^2+y+7=0$

$D=1-4\cdot7<0$ корней нет.

пара отпадает.

В конечном итоге у нас остались ~~но~~ все подходящие пара других быть не может, т.к. мы рассмотрели все случаи.

Ответ: $(15;2)$; $(10;-3)$, $(-2;1)$, $(-5;-2)$

7 б

·скобы

Шифр 7028

Задание 4:

$$\begin{cases} x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0 ; & \text{Д-ть: } x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2} \\ & p\neq 0, \text{ по усл. задачи.} \end{cases}$$

По Теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2p^2} \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$$

$x_1+x_2=-p$ | в кв.

$(x_1+x_2)^2=p^2$

$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=p^2$; подставим $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2p^2}$

$x_1^2+x_2^2-\frac{1}{p^2}=p^2$

$x_1^2+x_2^2=p^2+\frac{1}{p^2}$ | в кв. возводим.

$x_1^4+x_2^4+2\cdot x_1^2\cdot x_2^2=p^4+\frac{1}{p^4}+2$; $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2p^2}$ => $2\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_1\cdot x_2=$

$=2\cdot\frac{1}{2p^2}\cdot\frac{1}{2p^2}=\frac{1}{2p^4}$

$x_1^4+x_2^4+\frac{1}{2p^4}=p^4+\frac{1}{p^4}+2$

$x_1^4+x_2^4=p^4+\frac{2-1}{2p^4}+2$

$x_1^4+x_2^4=p^4+\frac{1}{2p^4}+2$

$x_1^4+x_2^4-2=p^4+\frac{1}{2p^4}$; теперь подставим это в $x_1^4+x_2^4-2\geq\sqrt{2}$ =>

=> $p^4+\frac{1}{2p^4}\geq\sqrt{2}$

$\frac{2p^8+1-2\sqrt{2}p^4}{2p^4}\geq 0$ => $\frac{(\sqrt{2}p^4-1)^2}{2p^4}\geq 0$, $2p^4\neq 0$ по усл. задачи

$2p^4>0$ – выполн. т.к. р. стоит в чётной степени

мы могли возводить в квадрат, т.к. одинаково по знаку примеры.

скобы

Шифр 7028

p^4 т.к. В итоге: $2p^4 - ...$ не меньше на неравенство ⇒

$$\Rightarrow (\sqrt{2}\cdot p^4 - 1)^2 \geqslant 0$$ – всегда $(a)^2 \geqslant 0$, так что

утверждение $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2-\sqrt{2}$ – верно. Ч.т.д.

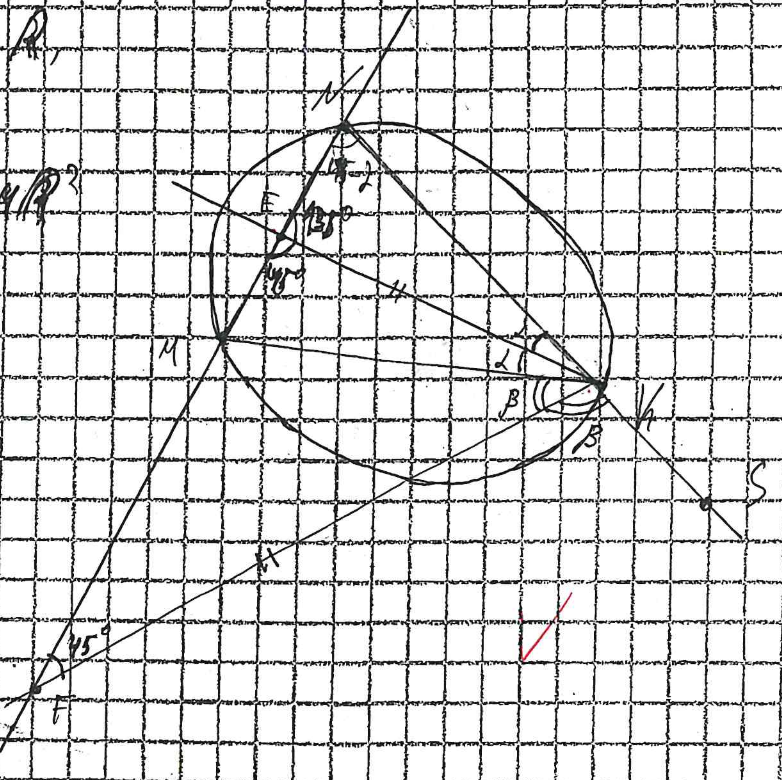
7б

Задача 5.

Дано: $\triangle MNK$, окр. с R,

$KE = KF$

Д-ть: $MK^2 + NK^2 = 4R^2$



Д-во:

1) Обозначим $\angle NKE = \angle EKM = \angle \alpha$, $\angle MKF = \angle FKS = \beta$

2) $2\alpha + 2\beta = 180°$ (смеж. углы) ⇒ $2(\alpha+\beta) = 180$ $|:2$

$\alpha + \beta = 90°$ ⇒ $\angle EKF = 90°$

3) В $\triangle EKF$, $\angle EKF = 90°$, $EK = KF$ (по усл.) ⇒

⇒ $\triangle EKF$ – равнобедренный и прямоугольный ⇒

⇒ $\angle KFE = \angle EFK = \frac{180-90}{2} = 45°$

скобы

Шифр 4028

4) ~~∠ENK~~ = ∠NEK = 180° − 45° = 135° ⇒ ∠ENK = 180° − 135° − α = 45 − α (α < 120°)

5) $\frac{MN}{\sin 2\alpha} = 2R$ (след. теор. sin) – возведём обе части в квадрат.

⇓

$\frac{MN^2}{\sin^2 2\alpha} = 4R^2$ (1)

6) $MN^2 = NK^2 + MK^2 - 2\cdot\cos 2\alpha\cdot NK\cdot MK$ (Теорема cos) ⇒

⇒ подставим в формулу (1) ⇒

$$\Rightarrow \frac{NK^2 + MK^2 - 2\cos 2\alpha\cdot MK\cdot NK}{\sin^2 2\alpha} = 4R^2$$

А теперь давайте ~~за~~ сделаем анализ задачи:
мы должны доказать $MK^2 + NK^2 = 4R^2$, но наши предыдущие рассуждения верны ⇒

$$\frac{NK^2 + MK^2 - 2\cos 2\alpha\cdot MK\cdot NK}{\sin^2 2\alpha} = 4R^2$$

У этого равенства получится нам нужное только в одном случае ⇒ если $\sin^2 2\alpha = 1$ и $\cos 2\alpha = 0$, это достигается при $\alpha = 45°$, т.к. если $\cos 90° = 0$ и $\sin 90° = 1$ ⇒
⇒ $NK^2 + MK^2 = 4R^2$ – и всё у нас сходится, но у нас если угол ENK = 45° − α и в таком случае он равен 0°, а этого быть не может, кстати в подтверждение того, что α = 45° ⇒ ∠NKM = 90° и MN = 2R = d (по св-ву впис. ∠) ⇒ $MK^2 + NK^2 = 4R^2 = MN^2$ (Теор. Пифагора) ⇒
⇒ такого треугольника вообще не существует, какой дан нам в задаче, либо $MK^2 + NK^2 = 4R^2$ не достигается и недоказуемо.

в остроугольном невозможно