

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
205	12.03.25	Луганский Н. А.	<i>[Signature]</i>
Шифр			025-2 МЗЛ

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

$$x^2 - \frac{5}{2}xy + y^2 = 0 \quad / : y^2$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0$$

$$k = \frac{x}{y}, \text{ тогда } k^2 - \frac{5}{2}k + 1 = 0$$

$$k = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$

$$k = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{или} \quad k = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Т.к. $x > y$, то $k \geq 1$, поэтому рассмотрим $k = 2$
найдем значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$:

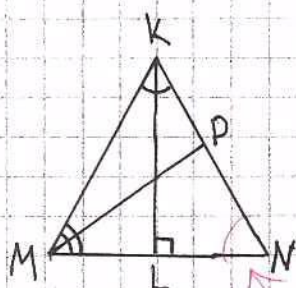
$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{ky+y}{ky-y} = \frac{y(k+1)}{y(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$$

подставим $k = 2$:

$$\frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Ответ: 3

~ 5



Дано: $\triangle MKN$; MN -основание;

KL, MP -биссектрисы; $MP = 2KL$

Найти: $\angle MKN$

Решение:

Пусть $\angle MNK = \angle MKN = \alpha$ (т.к. $\triangle MKN$ с основанием MN).

Тогда $\angle NMK = 180 - 2\alpha$

$$\angle MNK = \angle NMK$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

025-2
14 34

Рассмотрим биссектрисы:

Биссектриса KL делит $\angle MNK$ на два угла: $\angle MNK =$
 $= \angle LNK = \frac{a}{2}$

Биссектриса MP делит $\angle NMK$ на два угла: $\angle NMP =$
 $= \angle PMK = \frac{180^\circ - 2a}{2} = 90^\circ - a$

Используем св-во бис-сы:

В $\triangle MNK$ бис-са KL делит сторону MN в отношении

$$\frac{MK}{KN} = \frac{ML}{LN}. \text{ Т.к. } MK = KN, \text{ то } ML = LN.$$

Биссектриса MP делит сторону NK в отношении

$$\frac{NM}{MK} = \frac{NP}{PK}.$$

Учитывая условие $MP = 2KL$:

Пусть длина $KL = x$, тогда $MP = 2x$

Используем теорему о бис-се для нахождения соотношений между сторонами и углами.

Найдем угол a :

Рассмотрим $\triangle MKL$:

$$\angle MKL = \frac{a}{2}$$

Рассмотрим $\triangle MPK$:

$$\angle MPK = 90^\circ - a$$

Используем соотношение $MP = 2KL$ и теорему синусов для нахождения $\angle a$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

025-2
М 31

После подстановки и преобразований получим ур-е,
которое можно решить относительно a .

Решение этого ур-я дает $a = 60^\circ$.

Ответ: $\angle MKN = 60^\circ$

$$n^3 a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{78}{79} = \frac{1}{79}$$

$$\frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{3^3}{2^3} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{5^3}{4^3} \cdot \frac{6^3}{5^3} \dots \frac{80^3}{79^3} = \left(\frac{80}{2}\right)^3 = 40^3$$

$$\frac{1}{79} \cdot 40^3 = \frac{64000}{79}$$

Ответ: $\frac{64000}{79}$

$\frac{64000}{79}$

№2

$$a^2 - a = k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$a^4 - a = m, \text{ где } m \in \mathbb{Z}$$

$$a^4 = (a^2)^2$$

Используя первое ур-е $a^2 = a + k$, подставим:

$$a^4 = (a + k)^2 = a^2 + 2ak + k^2$$

Из второго ур-я $a^4 - a = m$, подставим выражение
для a^4 :

$$a + k + 2ak + k^2 - a = m$$

$$k + 2ak + k^2 = m$$

$$2ak = m - k - k^2$$

случай

$k = 0$ и $k \neq 0$ не
выражены

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

025-2
N-34

$$a = \frac{m-k-k^2}{2k}$$

Поскольку k и m — целые числа, числитель $m-k-k^2$ также является целым числом. Знаменатель $2k$ — целое число, т.к. k — целое.

Таким образом, a выражается как отношение двух целых чисел. Чтобы a было целым, числитель $m-k-k^2$ должен делиться на $2k$ без остатка.

Поскольку a выражается как отношение целых чисел и по условию $a^2 - a$ и $a^4 - a$ — целые числа, то a должно быть целым числом.

Ответ: a — целое число.

ОК (шесть)