Шифр 08588

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20б	22.03.21	Гендрина	[illegible]

1	2	3	4	5
5	7	7	0	0

№ 2.1

$x^2+kx+k=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{k=?\ (k\in\mathbb{Z}),\text{ чтобы } \left[\begin{array}{l} x_1\in\mathbb{Z} \\ x_2\in\mathbb{Z}\end{array}\right.}$

7б

1) рассмотрим случай $x_1=x_2$.

$x^2+kx+k=0$

$D=k^2-4k=0$ (т.к $x_1=x_2$)

$k(k-4)=0$

$\left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=4\end{array}\right.$

1.1) $k=0$:

$x^2=0$

$x=0 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ ✓

1.2) $k=4$:

$x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$

$x=-2 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ ✓

2) рассмотрим ~~$x_1\neq x_2$~~ другие случаи: , когда есть какие-то корни x_1, x_2:

$x^2+kx+k=0$

$+\begin{cases} x_1+x_2=-k \\ x_1\cdot x_2=k \end{cases} \Rightarrow x_1+x_1\cdot x_2+x_2=0$

(по т. Виета)

$(x_1+1)(x_2+1)=1$

скобы

Шифр 08588

№ 2.2

Без ограничения общности будем считать, что $x_1 \in \mathbb{Z}$

$(x_1+1)(x_2+1)=1$

$x_1+1=\frac{1}{1+x_2}$

$x_1=\left(\frac{1}{1+x_2}-1\right)\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{1+x_2}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 \vdots (1+x_2)$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l}1+x_2=1\\1+x_2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_2=0\\x_2=-2\end{array}\right.$

• если $x_2=0$, то $x_1=0$ (оба целые => подходят)

• если $x_2=-2$, то $x_1=-2$ (оба целые => подходят)

2.1) $x_1=0,\ x_2=0$:

$\begin{cases}x_1+x_2=-k\\x_1\cdot x_2=k\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{k=0}$

2.2) $x_1=-2,\ x_2=-2$:

$\begin{cases}x_1+x_2=-k\\x_1\cdot x_2=k\end{cases} \Rightarrow \boxed{k=4}$

Ответ: $k=0;\ 4$

№ 1.1

6б

$a=3^{62}-3^{31}\cdot2^{18}+2^{36}\underset{7}{\equiv}4^{62}+4^{31}\cdot2^{18}+2^{36}=2^{124}+2^{62}\cdot2^{18}+2^{36}=$

?

$=2^{124}+2^{36}+2^{80} \Rightarrow a\underset{7}{\equiv}2^{124}+2^{80}+2^{36}$

№ 1.2

рассмотрим остатки степеней двоек при делении на 7:

x	$2^x \pmod 7$
1	2
2	4
3	1
4	2
5	4
⋮	1
⋮	2
	⋮

$\Rightarrow$ остатки будут идти по циклу 2-4-1, причём $2^x \underset{7}{\equiv} 2$, при $x = 3k+1$

$2^x \underset{7}{\equiv} 4$, при $x = 3k+2$

$2^x \underset{7}{\equiv} 1$, при $x = 3k$

$$a = 3^{62} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} \underset{7}{\equiv} 2^{124} + 2^{80} + 2^{36} \underset{7}{\equiv} 2+4+1 \underset{7}{\equiv} 7 \underset{7}{\equiv} 0$$

$\Downarrow$

$3^{62} - 3^{31}\cdot 2^{18} + 2^{36} \,\vdots\, 7$ и очевидно, что

$3^{62} + 2^{36} - 3^{31}\cdot 2^{18} > 7 \Rightarrow$ у исходного числа как минимум 3 делителя (1, 7, „само число")

$\Downarrow$

оно составное. ч.т.д.

скобы

Шифр 08588

№ 3

1) Пусть первый брусок имеет массу m_1 и массу золота в нём z_1. Пусть второй брусок имеет массу m_2, а массу золота в нём z_2. Пусть брусок серебра имеет массу m_3.

Тогда нам дано по условию:

$$\begin{cases} \dfrac{z_1+z_2}{m_1+m_2} = \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{z_1}{m_1+m_3} = \dfrac{2}{10} \\ \dfrac{z_2}{m_2+m_3} = \dfrac{2}{10} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{z_1+z_2}{m_1+m_2+m_3} = ?$$

2)

$z_1+z_2 = \frac{3}{10}(m_1+m_2)$

$m_1+m_2 = \frac{10}{3}(z_1+z_2)$

$z_1 = \frac{2}{10}(m_1+m_3)$

$m_1+m_3 = \frac{10}{2}\cdot z_1$

$z_2 = \frac{2}{10}(m_2+m_3)$

$m_2+m_3 = \frac{10}{2}\cdot z_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1+m_2 = \frac{10}{3}z_1+\frac{10}{3}z_2 \\ m_1+m_3 = 5z_1 \\ m_2+m_3 = 5z_2 \end{cases}$$ (сложим все равенства)

$2(m_1+m_2+m_3) = \frac{25}{3}z_1+\frac{25}{3}z_2$

$m_1+m_2+m_3 = \frac{25}{6}(z_1+z_2)$

3) $\dfrac{z_1+z_2}{m_1+m_2+m_3} = \dfrac{z_1+z_2}{\frac{25}{6}(z_1+z_2)} = \dfrac{6}{25} = \dfrac{24}{100} = 24\%$

Ответ: 24 %

7Б