

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»  
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ  
заключительного этапа

ОМ10-47

Шифр

|     |                                                                                         |                      |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1.  | Предмет                                                                                 | математика           |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2.  | Вариант                                                                                 | 1                    |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3.  | Класс                                                                                   | 10                   |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4.  | Фамилия                                                                                 | Д                    | О | Л | Г | О | П | О | Л | О     | В | А |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | Имя                                                                                     | А                    | Л | Е | К | С | А | Н | Д | Р     | А |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | Отчество                                                                                | В                    | Л | А | Д | И | М | И | Р | О     | В | Н | А |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5.  | Дата рождения                                                                           | 1                    | 0 |   |   |   |   | 1 | 0 |       |   |   |   | 2 | 0 | 0 | 5 |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |                                                                                         | Число                |   |   |   |   |   |   |   | Месяц |   |   |   |   |   |   |   | Год |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6.  | Страна                                                                                  |                      |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7.  | Регион (пр: Томская обл., Калининградская область)                                      | Свердловская область |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8.  | Вид муниципального образования (пр: пгт, деревня, село, город)                          | город                |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9.  | Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)                                           | Екатеринбург         |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10. | Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время | МАДУ лицей №135      |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |   |   |   |   |   |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись



Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|------------|------|--------------------|---------------------|
| 23         |      | Трапезникова И.И.  | В.И.                |

② рассмотрим параболу  $y = (a+1)x^2 - (a+1)x + 2022$

$x_0 = \frac{a+1}{2(a+1)} = \frac{1}{2}$   $y_0 = \frac{a+1}{4} - \frac{a+1}{2} + 2022 = -\frac{a-1}{4} + 2022$

При  $x=0, x=1$   $y=2022$

Тогда график получится след. обр:

Очевидно, что график может как убывать, так и возрастать.

Но  $x_0 = \frac{1}{2}$  — точка пошла в промежуток  $[0; 1]$   $\Rightarrow$  максимальное значение, которое может принимать  $y_0 = 2022$ , но в этом случае графиком будет не парабола, а линия,

т.к.  $\frac{a+1}{4} - \frac{a+1}{2} + 2022 = 2022$

$\frac{a+1}{4} - \frac{a+1}{2} = 0$

$\frac{a+1}{4} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a+1=0$   
 $a=-1$

~~Парабола будет~~

Из всего этого следует, что в нашем случае график только возрастающий  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow a+1 > 0$   
 $a > -1$  Ранее было введено, что

$y_0 = -\frac{a-1}{4} + 2022$   $\Rightarrow$  чем больше  $a$ , тем меньше  $y_0$ . Минимальное значение  $y_0$  это мы можем получить  $a_{\max}$ .

Мин. значение  $y$  на промежутке  $[0; 1]$  это  $-2022$ . ~~Вариант~~ ~~х~~ тогда  $x_0$  пошла в промежуток  $\Rightarrow$

$-2022 = \frac{a+1}{4} - \frac{a+1}{2} + 2022$

$-4044 = -\frac{a-1}{4}$

$-a-1 = -16176$   
 $a+1 = 16176$   
 $a = 16175$

Ответ:  $a_{\max} = 16175$



④ Раскроем скобки:  $a^2/x^2 + a^2/y^2 + a^2/z^2 + b^2/x^2 + b^2/y^2 + b^2/z^2 + c^2/x^2 + c^2/y^2 + c^2/z^2 - a^2/x^2 - 2axbz - b^2/z^2 - b^2/y^2 - 2bxcx - c^2/x^2 - c^2/z^2 + 2cza y - a^2/y^2$  ~~и приведем~~  
подобные и получим:  $a^2z^2 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2axbz + 2cza y - 2bxcx$

Теперь группировка: 1) квадрат суммы  $(a^2z^2 + 2cza y + c^2y^2) = (az + cy)^2$

2) вынесем:  $-2bx(az + cy)$

Тогда остается:  $(az + cy)^2 - 2bx(az + cy) + b^2x^2$

квадрат разности:  $((az + cy) - bx)^2$

квадрат любого числа - число неотрицательное  $\Rightarrow ((az + cy) - bx)^2 \geq 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  выражение всегда неотриц. и не зависит от переменных

① Факториалов всех чисел ~~больше~~ 1 - четные числа, т.к. хотя бы один множитель: 2

Теперь рассмотрим факториалы 1-6:

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

из этого следует, что начиная с 5! все факториалы оканчиваются на 0, т.е. кратны 10

Тогда сумма факториалов будет оканчиваться:  $1 + 2 + 6 + 24 = 33$

Сумма факториалов всегда будет оканчиваться на 3

Теперь рассмотрим, чис может оканчиваться сумма факториалов: мы уже сказали, что начиная с 5! все оканчиваются на 0  $\Rightarrow$  сумма 5 и более факториалов будет оканчиваться нулями, на которые закончилась сумма первых 4:  $1 + 2 + 6 + 24 = 33$ , т.е. на 3.

Рассмотрим, на что оканчиваются квадраты чисел:

|           |            |            |           |
|-----------|------------|------------|-----------|
| $1^2 = 1$ | $4^2 = 16$ | $7^2 = 49$ | $0^2 = 0$ |
| $2^2 = 4$ | $5^2 = 25$ | $8^2 = 64$ |           |
| $3^2 = 9$ | $6^2 = 36$ | $9^2 = 81$ |           |

Это цифры: 0, 1, 4, 5, 6, 9

квадрат не оканчивается на 3  $\Rightarrow$  сумма 4 и более факториалов не будет являться точным квадратом.

Рассмотрим факториалы первых трех чисел:

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$1! + 2! = 5 \text{ 5-не квадрат числа}$$

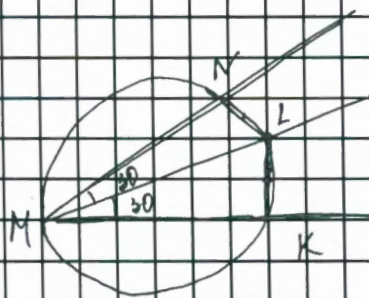
$$1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9 = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 3, 1! = 1 = 1^2, n \neq 1$$

Ответ:  $n = 1; n = 3$



5



Четырехугольник  $MNLK$  - вписанный  $\Rightarrow \angle M + \angle L = \angle N + \angle K = 180^\circ$

$\angle LMA = \angle KML = 30^\circ$ , тогда отрезки (дуги) на которых они опираются тоже равны ( $NL = LK$ )

т.  $L$  лежит на хорде  $MN$ , эта точка равноудалена от сторон угла, т.к.  $NL = LK$ , то это и есть их биссектриса и это значит, что  $NL \perp MN$   
 $LK \perp MK$

$\angle MNL = \angle MNK = 90^\circ$ ,  $\triangle MNL, \triangle MLK$  - вписанные

$ML$  - диаметр ок-ты

$\triangle MNL = \triangle MLK$  ( $\angle NML = \angle KML$   
 $ML$  - общ. ст.  
оба  $\triangle$  - прямоугольные)

$\Rightarrow MN = MK, S_{\triangle MNL} = S_{\triangle MLK} = \frac{1}{2} S_{\triangle MNK} = 2,5 = 12,5$

$S_{\triangle MNL} = \frac{MN \cdot NL}{2}$   $NL$  лежит против  $30^\circ \Rightarrow NL = \frac{ML}{2}$ , пусть  $LM = x$ , тогда  $ML = 2x$   
 $MN = x\sqrt{3}$

$$S_{\triangle MNL} = \frac{x\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 12,5$$

$$x^2\sqrt{3} = 25$$

$$x = \sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{3}}$$

$$MN = \sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25\sqrt{3}}$$

$$MN + MK = 2MN = 2 \cdot \sqrt{25\sqrt{3}}$$

ответ длина отрезков  $2\sqrt{25\sqrt{3}}$

$$3) a^3 - 2022a = b^3 - 2022b = c^3 - 2022c$$

$$a^3 - 2022a - b^3 + 2022b = 0$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) - 2022(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2 - 2022) = 0$$

$$a-b=0$$

$$a=b$$

невозможна,  
т.к. числа разн.

$$a^2+ab+b^2 = 2022$$

$$a^3 - 2022a - c^3 + 2022c = 0$$

$$(a-c)(a^2+ac+c^2) - 2022(a-c) = 0$$

$$(a-c)(a^2+ac+c^2 - 2022) = 0$$

$$a-c=0$$

$$a=c$$

невозм.

$$a^2+ac+c^2 = 2022$$

$$a^2+ab+b^2 = a^2+ac+c^2$$

$$b^2 - c^2 + ab - ac = 0$$

$$(b-c)(b+c) + a(b-c) = 0$$

$$(b-c)(a+b+c) = 0$$

$$b-c=0$$

$$b=c$$

выводим.

$$a+b+c=0$$