

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
18		Коракеев	Ке
Шифр			040139

№1. $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy \quad \text{т.к. } x \text{ и } y - \text{положительные (целые)} \Rightarrow x-y = \sqrt{\frac{4xy}{3}} = 2\sqrt{\frac{xy}{3}}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy \quad \text{т.к. } x \text{ и } y - \text{положительные (целые)} \Rightarrow x+y = \sqrt{\frac{16xy}{3}} = 4\sqrt{\frac{xy}{3}}$$

Тогда $\frac{x+y}{x-y} = \frac{4\sqrt{\frac{xy}{3}}}{2\sqrt{\frac{xy}{3}}} \quad \text{т.к. } x \text{ и } y - \text{положительные (целые)} \Rightarrow xy > 0$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{\frac{xy}{3}}}{2\sqrt{\frac{xy}{3}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	4	0	0	18/4

№2. т.к. $c \geq 3 \Rightarrow c^2 \geq 9$, тогда

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 121 \\ a^2 + b^2 + 9 &\geq 121 \\ a^2 + b^2 &\geq 112 \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 12 + 2ab$$

$$(a+b)^2 \geq 12 + 2ab$$

т.к. $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, т.е. эти числа положительные $\Rightarrow$

$$a+b \geq \sqrt{12 + 2ab} \quad \text{т.к. } a \geq 1, b \geq 2 \Rightarrow ab \geq 2, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq \sqrt{12 + 2 \cdot 2} \\ a+b &\geq \sqrt{16} \end{aligned}$$

$$a+b \geq 4$$

$$\text{т.к. } c \geq 3 \text{ (целое)} \Rightarrow$$

$$a+b+c \geq 4+3$$

$$a+b+c \geq 7$$

итд.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$n^3 \quad Q_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{2n(n^2-1) + (n^2-1)(n^2+1)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}$$

так у искомого произведения индексы обратной последовательности натуральных чисел $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4 n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+2)^3}{(n+1)^4} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+3)^3}{(n+2)^4} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4 n^3}$$

вот здесь?

$\Rightarrow$ куб в числителе меньшего числа сократится с третьей степенью знаменателя следующего числа (зачеркнуто сплошной линией) кроме первого и последнего в числителе

оставшегося числа, кроме $n-1$, в числителе сократится с знаменателем следующего (красно зачеркнуто пунктиром).

$$\Rightarrow \frac{(2-1) \cdot (99+1)^3}{2^3 \cdot 99} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 99} = \frac{25 \cdot 50 \cdot 100}{99} =$$

$$= \frac{125000}{99}$$

$$\cdot \frac{(2-1)(2+1)^3}{2^4 2^3} \cdot \frac{(3-1)(3+1)^3}{3^4} \cdot \dots \cdot \frac{(99-1)(99+1)^3}{99^4} =$$

$$= \frac{(2-1)(99+1)^3}{2^3 \cdot 99} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 99} = \frac{125000}{99}$$

Ответ: $\frac{125000}{99}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

или $x^2 + px - \frac{1}{4p^2} = 0 \quad | \cdot 2p^2$

$$\frac{2p^2x^2 + 2p^3x - 1}{2p^2} = 0$$

так по уел $p \neq 0 \Rightarrow 2p^2x^2 + 2p^3x - 1 = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 4p^6 + 8p^2 = 4p^2(p^4 + 2)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2p^3 + 2p\sqrt{p^4 + 2}}{4p^2} \\ x_2 = \frac{-2p^3 - 2p\sqrt{p^4 + 2}}{4p^2} \end{cases} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = \left(\frac{2p\sqrt{p^4 + 2} - 2p^3}{4p^2} \right)^4 + \left(\frac{-2p^3 - 2p\sqrt{p^4 + 2}}{4p^2} \right)^4 =$$

$$= \frac{(\sqrt{p^4 + 2} - p^2)^4 + (p^2 + \sqrt{p^4 + 2})^4}{(4p^2)^4} =$$

$$= \frac{2(p^4 + 2)^2 + 8(p^4 + 2)p^4 + p^8}{2^4 p^4} = \frac{2(2p^8 + 4p^4 + 1)}{2^4 p^4} = \frac{2p^8 + 4p^4 + 1}{2p^4} =$$

$$= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \text{ сравним с } 2 + \sqrt{2}$$

Задача сводится к з-ву, что $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$.

так $p^4 > 0$ ($p \neq 0$ по уел) $\Rightarrow (p^4 + \frac{1}{2p^4})^2 \geq 2$

$$p^8 + \frac{2p^4}{2p^4} + \frac{1}{4p^8} \geq 2$$

$$p^8 + \frac{1}{4p^8} \geq 1$$

$$\frac{4p^{16} + 1}{4p^8} \geq 1$$

при $|p| \geq 1$ выполняется изг.

при $|p| \in (0; 1)$ вернемся к

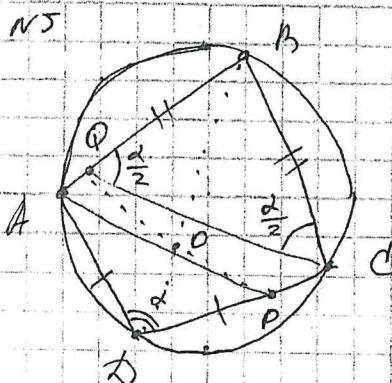
$$p^4 + \frac{1}{2p^4}$$

Здесь второй член ≥ 1 . тогда, действительно,

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

чзг.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			



т.е. $\triangle ABCD$ - впис (угн) $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

обозначим $\angle ADE = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180 - \alpha$

$\triangle ADP$ и $\triangle QDE$ равнобедренные ($AD = DP$ и $QE = ED$ по угн)

$$\angle DAP = \angle DPA = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle BQC = \angle BCQ = \frac{180 - (180 - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

т.е. $2\angle BQC = 2\angle BCQ = \angle ADC = \alpha$.

Др. Пусть $BD \cap AC = O$. Задача сводится к тому, чтобы показать, что

что BO - медиана $\triangle BQR$. Если это утверждение верно, то и

ответ к вопросу задачи — «да».

Это и надо было доказать!