Шифр 08366

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
12б	21.03.24	Пешурина	

1	2	3	4	5
0	5	1	1	5

№2

$t^4 - 2\sqrt{13}\cdot t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$

пусть параметр $a = \sqrt{13}$, тогда

$t^4 - 2at^2 + t + a^2 - a = 0$, сгруппируем

$t^4 + a(-2t^2 - 1) + t + a^2 = 0$, сгруппируем по полному квадрату

$\left(a^2 + a(-2t^2 - 1) + \frac{(-2t^2-1)^2}{4}\right) + \left(-t^2 + t - \frac{1}{4}\right) = 0$

Применим формулу ФСУ: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$\left(\frac{-2t^2 - 1}{2} + a\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

Применим формулу ФСУ: $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

$(-t^2 - t + a)(-t^2 + t + a - 1) = 0$, имеем совокупность решений:

$\left[\begin{array}{l} -t^2 - t + a = 0 \\ -t^2 + t + a - 1 = 0 \end{array}\right.$, обратная замена параметра:

$a = \sqrt{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -t^2 - t + \sqrt{13} = 0 \ (1) \\ -t^2 + t + \sqrt{13} - 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

5б

Неполное реш.

1) Решим (1):

$-t^2 - t + \sqrt{13} = 0 \quad |\cdot(-1)$

$t^2 + t - \sqrt{13} = 0$

н.к. по дискриминанту:

$D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-\sqrt{13}) = 4\sqrt{13} + 1 > 0$

Место для скобы

Шифр 08366

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{13}+1}}{2}$ или $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{\sqrt{4\sqrt{13}+1}}{2} - \frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{\sqrt{4\sqrt{13}+1}}{2} - \frac{1}{2} \end{array}\right.$

2) Решение (2):

$-t^2 + t + \sqrt{13} - 1 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$t^2 - t - \sqrt{13} + 1 = 0$

т.к. по дискриминанту:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1(-\sqrt{13} + 1) = 4\sqrt{13} - 3 > 0$

$t_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2}$ или $\left[\begin{array}{l} t_3 = \frac{\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2} + \frac{1}{2} \\ t_4 = -\frac{\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2} + \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $t_1 = \frac{\sqrt{4\sqrt{13}+1}}{2} - \frac{1}{2}$

$t_2 = -\frac{\sqrt{4\sqrt{13}+1}}{2} - \frac{1}{2}$

$t_3 = \frac{\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2} + \frac{1}{2}$

$t_4 = -\frac{\sqrt{4\sqrt{13}-3}}{2} + \frac{1}{2}$

№4

даны 2 числа a и b, которые удовлетворяют условиям:

(1) $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$ и (2) $b^2 - a^2 > b - a$

Нам нужно док-ть, что числа a и b удовл. неравенству $b^3 - a^3 > b - a$

I $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

Нужно доказать, что: $b^2 + ab + a^2 > 1$

Место для скобы

Шифр 08366

Из условия $b^2 - a^2 > b$? делаем вывод: $b > a$?

Из условия $a < \frac{1}{2}$ делаем вывод: $a^2 < a$ $\Rightarrow$

1б

?

[illegible]

$\Rightarrow a^2 + ab < a + b$

II Сложим 2 неравенства:

$a^2 + ab + b^2 > 2a + 2b$, но $b < \frac{1}{2}$, поэтому

$2a + 2b < 1 + 1 = 2$

Мы доказали, что $b^2 + ab + a^2 > 2 \Rightarrow b^3 - a^3 > b - a$

Ответ: ч. т. д.

№3

Дано:

1 брусок с зол

2 брусок с зол

3 брусок серебра

1 + 2 брусок = 30% золота

1 + 3 или 2 + 3 = 20% золота

w 1 + 2 + 3 – ?

Решение:

Пусть % содержания золота в 1ом бруске = X, во 2ом = y, тогда:

I Из условия: при сплавлении двух брусков получаем сплав с 30% золота

$$\frac{x + y}{2} = 30$$

1б

II При сплавлении любого из 2ух брусков с бруском серебра получаем сплав с 20% золота:

$$\frac{x + 0}{2} = 20 \text{ или } \frac{y + 0}{2} = 20$$

(0 тк в бруске 3 нет содержания золота)

Из ур I получаем: $x + y = 60$

Из ур II получаем: $x = 40$, $y = 20$

место для скобы

Шифр 08366

Теперь найдем процентное содержание золота в сплаве, если сплавить 3 бруска:

$$\frac{40+20+0}{3} = \frac{60}{3} = 20\%$$

Таким образом, сплав, полученный при сплавлении 3х брусков будет содержать 20% золота

Ответ: 20%

№5

Дано:
выпуклый пятиугольник $MNKLF$

$MN \perp KL$
$NK \perp LF$

$MN = MF = LF = 1$

Док-ть:
$NK + KL < 1$

Решение:

Пусть прямые MN и KL пересекаются в точке A ($MN \cap KL = A$), а прямые NK и LF – в точке B ($NK \cap LF = B$) и пусть $\angle NMF = \alpha$, $\angle LFM = \beta$

Тогда на луче NK отложим отрезок $NC = MN = 1$

1) Если $\alpha + \beta = 180°$, то $MNLF$ – параллелограмм. Тогда LA и NB – высоты, проведённые к противоположным сторонам, а значит они не могут пересекаться в т. K

2) Если $\alpha + \beta > 180°$, то точка K и точка пересечения D прямых MN и LF лежат по разные стороны прямой NL. Точка A лежит на продолжении отрезка стороны LK за вершину K, поэтому A и D лежат по разные стороны от прямой NL, а значит $\angle DNB$ – внешний угол прямоугольного треугольника NAK. $\Rightarrow \angle DNB > 90°$

С другой стороны, поскольку $\angle DNB$ – острый угол прямоугольного $\triangle DNB$, то $\angle DNB < 90°$, что невозможно

3) Таким образом $\alpha + \beta < 180°$. Тогда один из углов α и $\beta < 90°$

Пусть $\alpha < 90°$

Имеем сумма $\angle$ четырехугольника $MNBF = 360°$, поэтому

$\angle MNB = 360° - 90° - \alpha - \beta = 270 - \alpha - \beta$

Из равнобедренных $\triangle MNC$ и MLF имеем:

$\angle NMC = \frac{1}{2}(180° - \angle MNC) = \frac{1}{2}(180° - \angle MNB) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - 90°)$,

$\angle LMF = \frac{1}{2}(180° - \angle LFM) = \frac{1}{2}(180° - \beta)$

$\Rightarrow \angle NMC + \angle LMF = \frac{1}{2}(90° + \alpha) > \alpha = \angle NMF$

место для скобы

Шифр

Это значит, что точка L лежит внутри $\triangle MNC$

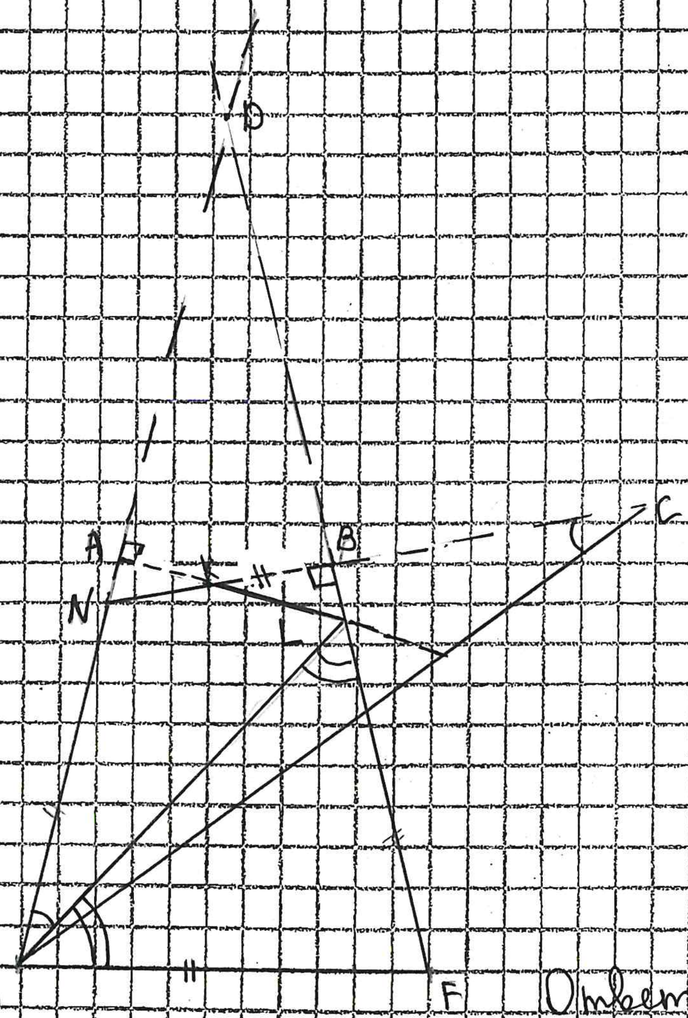
Пусть прямые KL и AC пересекаются в $\cdot E$ ($KL \cap AC = E$),

Тогда в $\triangle KCE$ $\angle KCE$ - острый, как угол при основании равнобедренного $\triangle MNC$,

а $\angle CEK$ - тупой, как внешний $\angle$ прямоугольного $\triangle MAE$

Значит, $KE < KC$, поэтому $NK + KL < NK + KE < (NK + KC) = NC = 1$;

Это и значит что $NK + KL < 1$



Ответ: Ч.Т.Д.

7

№1

Нужно доказать, что $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$ явл-ся составным.

Для того, чтобы доказать, что число является составным числом, нужно разложить его на множители:

Место для скобы

Шифр

Мы можем представить данное нам число, как: $(3^{2023})^2 - (3^{2023} \cdot 5^{1012}) + 5^{2024}$

Полученное выражение представляет собой разность квадрата и произведения 2ух множителей, что можно записать в виде $(a-b)(a+b)$, где $a = 3^{2023}$ и $b = 5^{1012}$

$\Rightarrow$ Данное число можно представить как $(3^{2023} - 5^{1012})(3^{2023} + 3^{1012})$

Таким образом мы видим, что число представляет собой произв-ие 2ух чисел, отличных от 1 и самого числа $\Rightarrow$ число $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$ явл-ся составным числом

Ответ: ч. т. д.