Шифр 07725

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17	21.03	Королева Е.Е.	[illegible]

№ 2

1) $0<x<\frac{1}{2}$; $0<y<\frac{1}{2}$

2) $y^2-x^2>y-x$.

Док-ть. $y^3-x^3>y-x$.

1	2	3	4	5	Σ
5	6	2	4	0	17

2) $(y-x)(y+x)>y-x$.

$(y-x)(y+x-1)>0$.

$y+x-1$ всегда <0 $0<x<\frac{1}{2}$ $0<y<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y-x<0$. $0<x+y<1$

$y^3-x^3>y-x$

$(y-x)(y^2+xy+x^2)>y-x$.

$(y-x)(y^2+xy+x^2-1)>0$.

$y-x<0$ $\Rightarrow$ $y^2+xy+x^2-1<0$ $+3xy$

$\cancel{y^2-2xy+x^2-1<-xy}$

$\cancel{(y-x)^2-1<-xy}$

$\cancel{(y-x-1)(y-x+1)<-xy}$

$y^2+2xy+x^2-1<3xy$

$(y+x)^2-1<3xy$

$(y+x-1)(y+x+1)<3xy$

$y+x-1<0$ всегда (док-но)

$y+x+1>0$ всегда . $3xy>0$ всегда $\Rightarrow$

$(y+x-1)(y+x+1)<0$

$3xy>0$ $3xy>(y+x-1)(y+x+1)$

$\Rightarrow$ $y^3-x^3>y-x$. ч.т.д.

+

Место для скобы

Шифр 07725

№1 S – сумма цифр

Наибольшая сумма цифр $= 9+9+9+9=36$, тогда отношение числа и сумме его цифр $= \frac{9999}{36}$.

Т.к. нам нужно наименьшее отношение, то будем брать наименьшие возможные числа с опр. суммами: $S=35$ 8999, $S=34$ 7999 ... $S=28$ 1999. Тогда с каждым пос-ходом само число будет уменьш. в $\frac{9}{8}; \frac{8}{7}; \frac{7}{6}; \frac{6}{5}; ... \frac{3}{2}$;

а сумма чисел уменьш. в $\frac{36}{35}; \frac{35}{34}; \frac{34}{33}; \frac{33}{32}; \frac{29}{28} \Rightarrow$

все отношение будет ~~увеличиваться~~ уменьшатся.

Теперь Р-м промежуток сумм от 19 до 28, тогда $S=28$ 1899; $S=27$ 1799; ... $S=19$ 1099.

Само число будет уменьшатся $\approx$ в $\frac{19}{18}, \frac{18}{17} \frac{12}{11}$

а сумма цифр в $\frac{28}{27}; \frac{27}{26} ... \frac{12}{11} \Rightarrow$

все отношение всегда будет уменьшатся.

Для $S=19$. мин число -1099 $\frac{1099}{19} = 52\frac{11}{19}$. Теперь для $S=18$ ~~пок~~ покажем, что даже при делении наименьшего четырех значного числа $1000 / 18 = 55 > 52\frac{11}{19}$. Зн-т при уменьшении S увелич. числа отношение будет возрастать $\Rightarrow$ меньше отн. уже не станет $\Rightarrow$ Ответ: 1099.

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 18 \\ -90 & \overline{55} \\ \hline 100 & \end{array}$$

Место для скобы

Шифр 07725

№3

Заметим, что многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x$ кратен и 17, и 101. 2024 имеет остаток от деления на 17 = 1; от деления на 101 = 4.

Р-м. ~~ост~~ при делении на 101, это значит число: $101 + a_0 = 2024 \Rightarrow a_0$ имеет остаток 4 от деления на 101 и остаток 1 от деления на 17.

Р-м. полож. (мин. мн.) ост от деления на 101 = 4: по усл $|a_0| < 999$

4; 105; 206; 307; 408; 509; 610; 711; 812; 913.

И какие-то из этих чисел также должны иметь остаток 1 от деления на 17.

~~4; 105 / 17; 206 / 17~~ $\Rightarrow$ число $-1 \vdots 17$

Проверим: $3 \not\vdots 17$; $104 \not\vdots 17$; $205 \not\vdots 17$;

$306 : 17 = 18$, $0 \vdots 17$; 407: $67 \not\vdots 17$; 508: $168 \not\vdots 17$; 609: $99 \not\vdots 17$;

710: $30 \not\vdots 17$; 811: $131 \not\vdots 17$; 913: $63 \not\vdots 17$ $\Rightarrow |a_0| = 307$ — един. решение

Ответ: ± 307.

Место для скобы

Шифр 07725

№4

$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cdot\cos^{2025}(2x) = \sin x + \sin^{2023}(x) + 2024\cdot\sin^{2025}(x)$

Заметим, что если мы заменим $\sin x$ на $\cos 2x$ и $\cos 2x$ на $\sin x$, ничего не изменится $\Rightarrow$??

при $\cos 2x = \sin x$ — равенство выполн. (см)

$1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ Не доказано.

$D = 1 + 8 = 9$

$\sin x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right\} n \in \mathbb{Z}$

$\sin x_2 = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

Также можем обратить внимание на слагаемые вида

$(1-2\sin^2 x)^{2023}$ и $\sin^{2023} x$

$= \cos^{2023} 2x$

$2024\cdot(1-2\sin^2 x)^{2025}$ $2024\sin^{2025} x$

$1 - 2\sin^2 x$ 1

$=$

Если $\sin x \neq \cos 2x$, то есть $\sin x \neq 1 - 2\sin^2 x$, то

$\sin^{2025} x = 1$ или стремится к 0, тогда

$(1-2\sin^2 x)^{2025} = -1$ или стремится к 0, тогда

мы все же придём и $1-2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

∓

Место для скобы

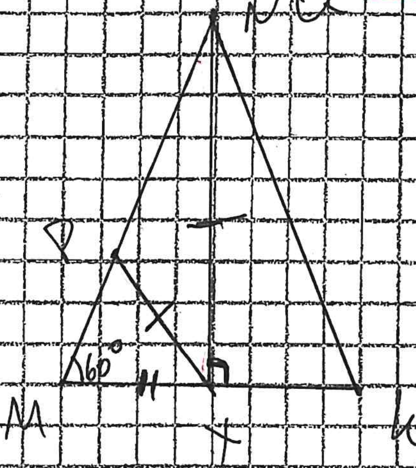
Шифр

№5 – по построениям

Наименьший отрезок будет, когда точка N будет совпадать с Q !, тогда

!

пояснение



$S_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 1 \to$

$a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$NX = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt[4]{3} = PX$?!

$MX = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} =$ [illegible]

$\angle$ ~~N~~ PX — тупое

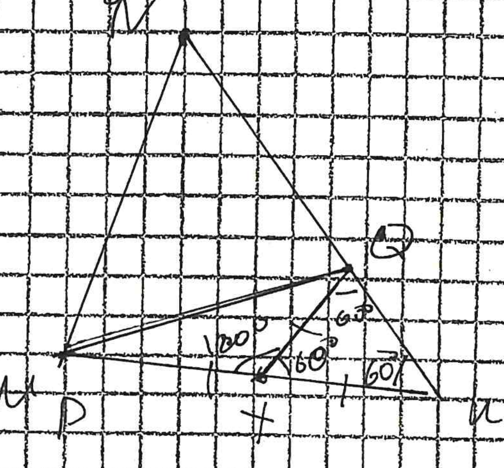
$\triangle MPX$:

$\frac{MX}{\sin\angle P} = \frac{PX}{\sin 60^\circ} \to \sin\angle P = \frac{1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}\cdot 2\sqrt[4]{3}} =$ [illegible]

$\angle MPX = 30^\circ \to \angle MXP = 90^\circ$ ~~$\angle P = \angle PXM = 30^\circ \to$~~ ~~$\angle PXK = 60^\circ \to$~~

$\to$ P совп. с N $\to$ отрезки сойдутся в точке

Наиб. знач.: M совп. с P



$PQ = \sqrt{PX^2 + XQ^2 - 2PX\cdot XQ\cdot\cos\angle PXQ}$ (Пиф.)

$PQ = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}$.

Ответ: ~~[illegible]~~ $0 \le |PQ| \le \sqrt[4]{3}$