

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
155	20.03.25	Белурмане А.	
Шифр			918565

N3

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

Найти: $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99}$

Преобразуем a_n .

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^2)^2 - 1^2 + 2n(n^2 - 1) - (n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n-1)(n+1)(n^2+1) + 2n(n-1)(n+1) - (n-1)(n+1)(n^2+1 + 2n)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n-1)(n+1)(n+1)^2}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}$$

Теперь распишем $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99}$, подставив n :

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} = \frac{1 \cdot 3^3}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdot \dots \cdot \frac{98 \cdot 100^3}{99^4}$$

Можно заметить закономерность и записать в виде факториалов.

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98) \cdot (3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot 100^3)}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 99^4} =$$

$$= \frac{98! \cdot \left(\frac{100!}{2}\right)^3}{(99!)^4} = \frac{98! \cdot \left(\frac{(100!)^3}{8}\right)}{(99!)^3 \cdot 99!} = \frac{(100!)^3}{(99!)^3 \cdot 99} = \frac{(100!)^3}{8 \cdot 99 \cdot (99!)^3} = \frac{1}{8 \cdot 99} \cdot \frac{(100 \cdot 99!)^3}{(99!)^3} =$$

$$= \frac{1}{8 \cdot 99} \cdot 100^3 = 1262, (62)$$

Ответ: 1262, (62)

N1

$$x > y$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

$$\frac{x+y}{x-y} = ?$$

Выразим сначала $x+y$, потом $x-y$.

$$1) x^2 + y^2 = \frac{16}{3} xy - \frac{6}{3} xy$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{16}{3} xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3} xy \Rightarrow x+y = \sqrt{\frac{16}{3} xy}$$

$$2) x^2 + y^2 = \frac{4}{3} xy + \frac{6}{3} xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = \frac{4}{3} xy$$

$$x-y = \sqrt{\frac{4}{3} xy}$$

$$\text{Из (1) и (2)} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{\frac{16}{3} xy}}{\sqrt{\frac{4}{3} xy}} = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \underline{2}$$

Ответ: 2

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

918305

№ 4

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$$

Дока: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$

Решим уравнение:

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

$$D = p^2 + \frac{4}{2p^2} = \frac{p^4 + 2}{p^2}$$

$$x_1 = -p + \sqrt{\frac{p^4 + 2}{p^2}} = \frac{\sqrt{p^4 + 2} - p^2}{p}$$

$$x_2 = -p - \sqrt{\frac{p^4 + 2}{p^2}} = \frac{-\sqrt{p^4 + 2} - p^2}{p}$$

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= \frac{(\sqrt{p^4 + 2} - p^2)^4}{p^4} + \frac{(-\sqrt{p^4 + 2} - p^2)^4}{p^4} = \frac{(p^4 + 2 + p^4 - 2p^2\sqrt{p^4 + 2})^2 + (p^4 + 2 + p^4 + 2p^2\sqrt{p^4 + 2})^2}{p^4} \\ &= \frac{(p^4 + 2 + p^4 - 2p^2\sqrt{p^4 + 2})^2 + (p^4 + 2 + p^4 + 2p^2\sqrt{p^4 + 2})^2}{p^4} = \\ &= \frac{p^4(p^2 - 2\sqrt{p^4 + 2})^2 + 4 + p^4(p^2 + 2\sqrt{p^4 + 2})^2 + 4}{p^4} = \frac{p^4(p^2 - 2\sqrt{p^4 + 2} - p^2 - 2\sqrt{p^4 + 2})^2 + 8}{p^4} \end{aligned}$$

$$\frac{(p^2 - 2\sqrt{p^4 + 2} + p^2 + 2\sqrt{p^4 + 2})^2 + 8}{p^4} = \frac{p^4 \cdot (-4\sqrt{p^4 + 2})^2 + 8}{p^4} = \frac{-8p^3\sqrt{p^4 + 2} + 8}{p^4}$$

$$\geq \frac{-8(p^3\sqrt{p^4 + 2} + 1)}{p^4}$$

$$\frac{-8(p^3\sqrt{p^4 + 2} + 1)}{p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$-8p^3\sqrt{p^4 + 2} + 8 \geq 2p^4 + \sqrt{2}p^4$$

25