

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			040200

$$\begin{array}{r} 112345 \\ 2162-120 \\ \hline \end{array}$$

Задача 1.

Дано: $x > 0, y > 0$

$$x > y$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

Чему равно:

$$\frac{x+y}{x-y} = ?$$

Решение: $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}xy = 0$$

$$1) x^2 + y^2 - \frac{6}{3}xy - \frac{4}{3}xy = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = \frac{4}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy \quad (1)$$

$$2) x^2 + y^2 + 2xy - \frac{16}{3}xy = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{16}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy \quad (2)$$

$$\text{из } (1) \text{ и } (2) \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{16}{3}xy}{\frac{4}{3}xy}$$

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{16}{4} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \pm 2 \quad (\text{но } -2 \text{ не подходит по усл. т.к. } \frac{x+y}{x-y} > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = 2$$

Ответ: 2.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 2.

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$$

по т. Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - 2x_1^2 x_2^2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

Подставим в выражение: $x_1 + x_2 = -p$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

$$\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - \frac{1}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{2p^2}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2} \quad | \cdot 2p^4$$

$$2p^8 + 4p^4 + 2 - 1 \geq 4p^4 + 2\sqrt{2}p^4$$

$$2p^8 - 2\sqrt{2}p^4 + 1 \geq 0$$

И $y = 2p^8 - 2\sqrt{2}p^4 + 1$ — кв

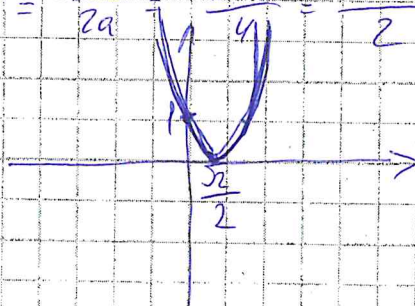
$$y = 0 \Rightarrow 2p^8 - 2\sqrt{2}p^4 + 1 = 0$$

И $t = p^4$

$$2t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$D = B^2 - 4ac = 8 - 8 = 0 \Rightarrow 1 \text{ корень.}$$

$$t = \frac{-B}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



получили одно корень
или корня нет?
или удовлетворяет
 $\Rightarrow$ неравенство верно
(т.к. можно найти
значения)? е.т.г.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
		Шифр	

Задача 3.

Дано:

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

Найти:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99}$$

Решение:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^2-1)(n^2+1) + 2n(n^2-1)}{n^4} \\ &= \frac{(n^2-1)(n^2+1) + 2n(n^2-1)}{n^4} = \frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)(n+1)^2}{n^4} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)}{n^4} \cdot \left[\frac{(n+1)^3}{n^4} \right] \end{aligned}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{97} \cdot a_{98} \cdot a_{99} = \frac{3^3}{2^4} \cdot \frac{4^3 \cdot 2}{3^4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5^3 \cdot 3}{4^4} \cdot \frac{6^3 \cdot 4}{5^4} \cdot \dots \cdot \frac{98^3 \cdot 96}{97^4} \cdot \frac{99^3 \cdot 97}{98^4} \\ &= \frac{100^3 \cdot 98}{99^4} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{100^3}{99} = \frac{50^3}{99} = \frac{125000}{99} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{125000}{99}$ +