

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
108	14.03.25	Лугина Н.Г.	<i>[Подпись]</i>
Шифр 025-2-М-17			

Задача 1

Будем рассматривать искомое выражение $\frac{x+y}{x-y}$ в квадрате; в самом деле, $x > y$, значит $x-y > 0$, тогда и возводить в квадрат мы будем положительное число: потеря решения не будет, тем более $x > 0$ и $y > 0$.

$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$, мы применим формулу квадрата суммы и квадрата разности. Зная, что $x^2+y^2 = \frac{10}{3}xy$ по условию, подставим в полученное выражение, получим

$$\frac{\frac{10}{3}xy + 2xy}{\frac{10}{3}xy - 2xy}, \text{ т.к. } x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ можно сокращать на } xy, \text{ в}$$

частности и на $xy \neq 0$; сделаем это. Получим.

$$\frac{\frac{10}{3} + 2}{\frac{10}{3} - 2} = \frac{\frac{10+6}{3}}{\frac{10-6}{3}} = \frac{16}{4} = 4, \text{ но вероим, что все это}$$

изначально равно $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$, значит

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 4, \text{ откуда } \frac{x+y}{x-y} = -2; \frac{x+y}{x-y} = 2, \text{ но } -2 \text{ — постороннее}$$

решение, потому что если $x > 0; y > 0; x > y$, то $x+y > 0$ (как сумма двух положительных), $x-y > 0$ (как разность двух положительных, причем из большего вычитают меньшее), но тогда и частное $\frac{x+y}{x-y} > 0$, как частное двух положительных чисел.

Ответ: 2

(если
баллы)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-17

Задача 2

Рассмотрим выражения $a^2+b^2+c^2$ и $(a+b+c)abc$.

Понятно, что для положительных a, b, c верно $(a+b+c)abc \geq (a^2+b^2+c^2)$ (из соображений, что $(a+b+c)abc = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$, но $bc \geq 1, ac \geq 1, ab \geq 1$ (это грубая оценка: в действительности $bc \geq 6, ac \geq 3, ab \geq 2$ из того, что $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$), тогда a^2, b^2, c^2 умножаются на „коэффициенты“, большие 1, тогда $(a+b+c)abc > a^2+b^2+c^2$).

Тогда $a+b+c > \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ (знак равенства сохранился, так как a, b, c — положительные, значит и произведение тоже положительно). Делая в грубой оценке, выражение $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$, считаем $c \geq b \geq a$, так как выражение

симметрично относительно a, b, c . Тогда для минимальных $a=1, b=2, c=3$ справедливо $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2} \geq \frac{14}{9} \geq 1 \frac{5}{9}$, однако для нас не выполнено условие задачи $a^2+b^2+c^2 \geq 21$.

Начнем рассматривать значения (возможные) для a, b, c при значениях минимальных других чисел.

Если $a=1, b=2$, то из $a^2+b^2+c^2 \geq 21$, следует, что

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-17

$c^2 \geq 21 - 1 - 4$, откуда $c \geq \sqrt{16}$, или $c \geq 4$, значит $a+b+c \geq 1+2+4$, $a+b+c \geq 7$, если a и b брать больше, то c будет меньше, но в целом $a+b+c \geq 7$, так как увеличение какого-то числа из a и b будет больше уменьшения числа c за счет того, что из c извлекается квадратный корень.

Если $a=1, c=3$, то из $a^2+b^2+c^2 \geq 21$ следует, что $b^2 \geq 21 - 1 - 9$, $b \geq \sqrt{11}$, значит $b > \sqrt{9}$ и $b \geq 3$, но тогда и $a+b+c > 1+3+3$, и $a+b+c \geq 7$. Ситуация с увеличением какого-то из чисел a и c аналогична: увеличение a или c больше уменьшения b за счет квадратного корня. Значит, $a+b+c \geq 7$.

Если $b=2, c=3$, то из $a^2+b^2+c^2 \geq 21$ следует, что $a^2 \geq 21 - 2^2 - 3^2$, и $a \geq \sqrt{8}$ и $a \geq \sqrt{4}$, т.е. $a \geq 2$. Тогда $a+b+c \geq 2+2+3 \geq 7$ и $a+b+c \geq 7$, и то же самое. Увеличение чисел a или c больше уменьшения b за счет квадратного корня, тогда $a+b+c \geq 7$.

Из первого случая следует, что $a+b+c \geq 7$, что и требовалось доказать.

65

Задача 4

Рассмотрим квадратный трехчлен $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$; найдем его корни, используя теорему Виетта.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ Шифр 025-2-М-17

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p; \quad (x_1^2 + x_2^2)^2 = p^2, \quad \text{откуда} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{1-p^2}{p^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2p^2}$$

Будем корни возведем в четвертую степень. Получим.

$$(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_1^3x_2 + 4x_2^3x_1 + 5(x_1x_2)^2 = p^4$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 - 4x_1^3x_2 - 4x_2^3x_1 + 5(x_1x_2)^2 = p^4 + \frac{4x_1^2}{2p^2} + \frac{4x_2^2}{2p^2} - \frac{5}{2p^2} =$$

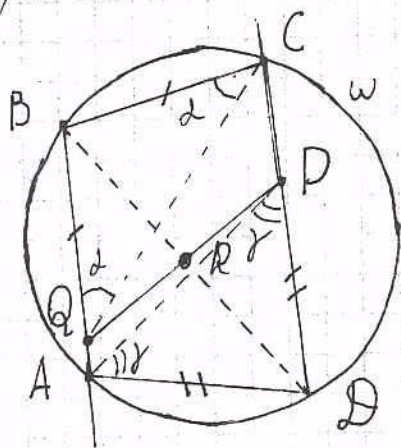
$$= \frac{2p^6 + 4x_1^2 + 4x_2^2 - 5}{2p^2} = \frac{2p^6 + 4(x_1^2 + x_2^2) - 5}{2p^2} = \frac{2p^6 + 4 \cdot \frac{1-p^2}{p^2} - 5}{2p^2} = \frac{2p^8 + 4 - 4p^3 - 5p^2}{2p^4}$$

Итого

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{2p^8 + 4 - 4p^3 - 5p^2}{2p^4}$$

$$(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4$$

Задача 5



Дано: окр. ω ; ABCD - вписанный
четырехугольник в окр. ω ; $Q \in AB$;
 $BC = BQ$; $P \in CD$; $DP = AD$; прямая
 $BQ \cap DP = R$

Найти: R - середина QP?

Решение:

причем здесь угол?

- 1) Так как ABCD - вписанный, то сумма его
противоположных углов 180° .
- 2) Из $\triangle QBC$, который равнобедренный ($BQ = BC$ по условию),
следует по признаку равнобедренного треугольника,
что $\angle BQC = \angle BCQ = \alpha$, но из этого же треугольника
по сумме углов $\angle QBC = 180^\circ - 2\alpha$. Аналогично из $\triangle ADP$
по признаку и теореме $\angle ADP = 180^\circ - 2\alpha$. Но $\angle ABC + \angle ADP = 180^\circ$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-17

из того, что $ABCD$ - вписанный.

Тогда $2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$, или $\alpha + \gamma = 90^\circ$.

05

Задача 5.

Для удобства $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4}$.

Для четных чисел при таком умножении
можно вынести $\frac{1}{2^4}$, т.е. $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{1}{2^4} \cdot (\dots)$

05