

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
24		Емельянов	Евг
Шифр			040250

Задача 1. Дано: a, b, c - действительные числа $(7+a+b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$
Найти: минимальное значение

Решение: 1) Пусть $x = a - b$, $y = b - c$, $d = c - a$. Тогда сумма $x + y + d = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0 \Rightarrow x + y + d = 0$

2) Функция для минимизации: $f(x, y, d) = (7+x)^2 + (2+y)^2 + (9+d)^2$, с ограничением: $g(x, y, d) = x + y + d = 0$

3) Функция Лагранжа: $L = (7+x)^2 + (2+y)^2 + (9+d)^2 + \lambda(x+y+d)$, приравняем к нулю

$$\begin{cases} x' = 2(7+x) + \lambda = 0 \Rightarrow 14 + 2x + \lambda = 0 \\ y' = 2(2+y) + \lambda = 0 \Rightarrow 4 + 2y + \lambda = 0 \\ d' = 2(9+d) + \lambda = 0 \Rightarrow 18 + 2d + \lambda = 0 \\ \lambda' = x + y + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 + 2x + \lambda = 0 \\ 4 + 2y + \lambda = 0 \\ 18 + 2d + \lambda = 0 \\ x + y + d = 0 \end{cases}$$

$$4) (14 + 2x + \lambda) - (4 + 2y + \lambda) = 0 \Rightarrow 10 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow 2x - 2y = -10 \Rightarrow x - y = -5 \Rightarrow x = y - 5$$

$$(14 + 2x + \lambda) - (18 + 2d + \lambda) = 0 \Rightarrow -4 + 2x - 2d = 0 \Rightarrow 2x - 2d = 4 \Rightarrow x - d = 2 \Rightarrow d = x - 2$$

5) Подставим выражения x и d через y :

$$x = y - 5, d = x - 2 = (y - 5) - 2 = y - 7 \Rightarrow x + y + d = (y - 5) + y + (y - 7) = 3y - 12 = 0 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$$

6) Найдем x и d

$$x = y - 5 = 4 - 5 = -1$$

$$d = x - 2 = -1 - 2 = -3$$

7) найдем λ

$$14 + 2x + \lambda = 0 \Rightarrow 14 + 2(-1) + \lambda = 0 \Rightarrow 14 - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow 12 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -12$$

8) Вернемся к старым переменным a, b, c :

$$x = a - b = -1 \Rightarrow a - b = -1 \Rightarrow a = b - 1$$

$$y = b - c = 4 \Rightarrow b - c = 4 \Rightarrow c = b - 4$$

$$d = c - a = -3 \Rightarrow c - a = -3$$

9) Подставим $x = -1$, $y = 4$, $d = -3$

$$(7+x)^2 + (2+y)^2 + (9+d)^2 = (7-1)^2 + (2+4)^2 + (9-3)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$$

Ответ: 108

Задача 2 Дано: $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$, $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

Найти: сумму $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$

Решение: 1) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ (коэффициент x^3)

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 4 \left(\frac{x^2}{x^4} \right) = 4 \left(\frac{-x^2}{x^4} \right) = -4 \left(\frac{x^2}{x^4} \right) = -4 \left(\frac{1}{x^2} \right) = -4 \left(\frac{-1}{1} \right) = 4$$

$$S_3 = x_1x_2x_3x_4 = 1 \left(\frac{x}{x^4} \right) = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} = -1$$

$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 = 1$$

2) Сумма квадратов: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = (-1)^2 - 2(4) = 1 - 8 = -7$

$$\text{Сумма кубов: } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 3(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = (-1)^3 - 3(-1)(4) + 3(1) = -1 + 12 + 3 = 14$$

3) $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, но сумма $R(x_1) + R(x_2) + R(x_3) + R(x_4) = a(-13) + b(9) + c(-1) + d(4)$

4) a, b, c, d находим от остатка $R(x)$ от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$\frac{x^6}{x^4} = x^2 \Rightarrow x^2 : x^4 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506 = (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506) - (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2) = -x + 506$$

5) $R(x) = -x + 506$. Тогда сумма $P(x_i) = \text{сумма } R(x_i) = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 \cdot 506 = -(-1) + 2024 = 2025$

Ответ: сумма = 2025

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

42000

Задача 4. Дано: $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$

Доказать: $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

Доказательство: 1) Неравенство Коши: $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$ подставляя условие: $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$$

$$2) \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}} \text{ таким образом } \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$3) \text{ Обозначим } S = x_1 x_2 \dots x_n. \text{ Тогда } \frac{S}{n} \geq S^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow S \geq n^n$$

4) Рассмотрим $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1)$. Поскольку $x_i \geq n-1$ для всех i так $S \geq n^n$ $x_i - n + 1$ выражение неотрицательно.

$$5) \text{ Неравенство Коши для чисел } x_1 - n + 1, x_2 - n + 1, \dots, x_n - n + 1: \frac{(x_1 - n + 1) + (x_2 - n + 1) + \dots + (x_n - n + 1)}{n} \geq$$

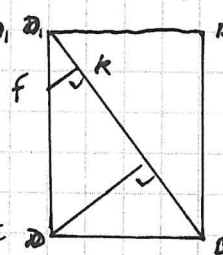
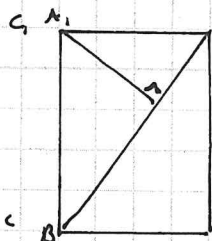
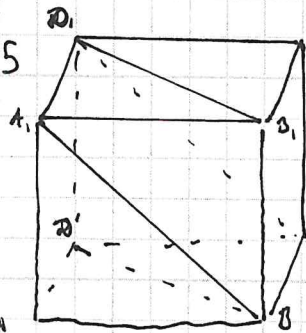
$$\geq \sqrt[n]{(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1)}, \text{ при } x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n^2 - n + n = n^2:$$

$$\frac{n^2 - n^2 + n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1)}$$

$$1 \geq \sqrt[n]{(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1)} \text{ обе части возведем в степени } n:$$

$$1 \geq (x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \text{ так неравенство доказано т.т.д. } \uparrow$$

Задача 5



Дано: куб - ABCD A, B, C, D, A1, B1, C1, D1
и плоскости α и β
Найти $\angle$

Решение: 1) т.к. у куба все грани квадраты, значит A_1C_1 - диагональ квадрата $A_1B_1C_1D_1$ $\Rightarrow$ длина, если ребро куба k , будет $k\sqrt{2}$

2) CD_1 - это диагональ боковой грани, то есть пространственная диагональ боковой грани $\Rightarrow$ длина равна $\sqrt{k^2 + k^2} = k\sqrt{2}$

3) Пусть ребро куба = 1. Напишем координаты в точку A $\Rightarrow A(0; 0; 0); B(1; 0; 0); C(1; 1; 0); D(0; 1; 0); A_1(0; 0; 1); B_1(1; 0; 1); C_1(1; 1; 1); D_1(0; 1; 1)$

Тогда $A_1C_1(1; 1; 0); CD_1(-1; 0; 1)$

Плоскость $\alpha \perp A_1C_1$, то есть ее вектор $\vec{n}_1(1; 1; 0)$

Плоскость $\beta \perp CD_1 \Rightarrow \vec{n}_2 \cdot CD_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2(-1; 0; 1) = 0$

4) $\angle$ - угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

5) метод Лагранжа. Функция $f(\vec{n}_2) = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1; 1; 0)$
 $(x, y, z) = x + y$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

определение $g(\vec{n}_2) = (-1; 0; 1) \cdot (x, y, z) = -x + y = 0$

$$|\vec{n}_2|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$L = x + y - \lambda(-x + z) - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

производные: $\frac{dL}{dx} = 1 + \lambda - 2\mu x = 0$

$$\frac{dL}{dy} = 1 - 2\mu y = 0 \quad \frac{dL}{dz} = -\lambda - 2\mu z = 0$$

Ограничения: $x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

7) подставим x, y, z в уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\left(\frac{1}{4\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\mu}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{16\mu^2} + \frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{16\mu^2} = 1$$

Сложим $\frac{1+4+1}{16\mu^2} = \frac{6}{16\mu^2} = \frac{3}{8\mu^2} = 1 \Rightarrow \mu^2 = \frac{3}{8} \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{\frac{3}{8}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$

Найдем x, y, z : $x = \frac{1}{4\mu} = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ при $\mu = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $y = \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$z = x + y = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1 + 2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ так $\vec{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

8. Найдем $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ $\vec{n}_1 = (1; 1; 0)$ $\vec{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + 0 = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Таким образом $\cos \alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ но $|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ $|\vec{n}_2| = 1$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30^\circ$

Ответ: $\alpha = 30^\circ$

Задача 3 $x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$

1) $m = \sqrt{x^2 + 1}$ $x^2 = m^2 - 1$ $(m^2 - 1) - 6m + 11 - \cos \frac{(m^2 - 1) + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$

$m^2 - 6m + 10 - \cos \frac{m^2 + \sqrt{2}x - 5}{18} = 0$

2) $\cos 1$
 $m^2 - 6m + 10 - 1 = 0$

$\cos 1$
 $m^2 - 6m + 11 = 0$

$D = 36 - 36 = 0$

$D = 36 - 44 = -8$ (нет корней)

$m = \frac{6}{2} = 3$

переход не очевиден!

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} &= 3 \\ x^2+1 &= 9 \\ x^2 &= 8\end{aligned}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } \pm 2\sqrt{2} - ?$$

оба ли корни подходят?
(во втором уравнении)