

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
158	12.03.25	Луганс Н.В.	<i>[Signature]</i>
Шифр			025-2-00-119

№1 Дано:
 $(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2$
 Найти: мин. значение.

Представим это x, y, z это:

$$x = 10 + a - b \quad y = 2 + b - c \quad z = 3 + c - a$$

Тогда сумма равна:

$$x + y + z = (10 + a - b) + (2 + b - c) + (3 + c - a)$$

$$x + y + z = 10 + 2 + 3 = 15$$

Используя неравенство, представим:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

Подставим:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{15^2}{3} = \frac{225}{3} = 75$$

Док-во:

$$x = y = z = \frac{15}{3} = 5$$

Тогда:

$$10 + a - b = 5 \\ a - b = -5$$

$$2 + b - c = 5 \\ b - c = 3$$

$$3 + c - a = 5 \\ c - a = 2$$

$$(a-b) + (b-c) + (c-a) = -5 + 3 + 2 = 0$$

Ответ: мин. значение равно 75

№2.

Дано:

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(x) \geq -\frac{9}{10} \quad f(x) \geq -\frac{1}{4}$$

$b \geq \frac{1}{4}$ - x равен для всех действ. чисел.

Док-во

Решение:

$$x^2 + ax + b - \frac{9}{10} \geq 0$$

можно обозначить уравнение как:
 $g(x) = x^2 + ax + (b - \frac{9}{10})$ - значение выражения всегда неотриц.
 Тогда функция неотриц. тогда когда у параболы нет
 корней т.е. $D \leq 0$ или парабола касается оси x если $D = 0$.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-ст-119

Решение с помощью дискриминанта

$$D = a^2 - 4 \left(b - \frac{9}{4} \right)$$

$$a^2 - 4 \left(b - \frac{9}{4} \right) \leq 0$$

$$a^2 - 4b + 9 \leq 0$$

$$a^2 \leq 4b - 9$$

$a^2 + 9 \geq 9$ - квадрат любого числа неотрицателен ($a^2 \geq 0$) то:

$$4b \geq 9$$

$$b \geq \frac{9}{4}$$

$$b \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left[b \geq \frac{9}{4} \right] \text{ наше значение больше } \frac{1}{4}$$

Значит мы доказали что $b \geq \frac{1}{4}$.

18

БЗ

Дано: ариф. прогрессия

$$a_1 = 25$$

$$a_{2025} = 625$$

Решение:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$d = 625 - 25 + (2025-1) \cdot d$$

$$625 = 25 + 2024d$$

$$2024d = 600$$

$$d = \frac{600}{2024} \checkmark$$

Вычислить

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

Рассмотрим сумму по формуле

$$S = \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \geq \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} \geq$$

$$= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}$$

$$S \geq \sum_{k=1}^{2024} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}$$

$$S \geq \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{d}$$

Подставим наши значения:

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			025-2-11-119

$$S = \frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{d} = \frac{25 - 5}{d} = \frac{20}{d}$$

Подставим $d = \frac{600}{2024}$

$$S = \frac{20}{\frac{600}{2024}} = \frac{20 \cdot 2024}{600}$$

$$S = \frac{40480}{600} = \frac{2024}{30} = \frac{1012}{15} = 67 \frac{8}{15}$$

Ответ: $S = 67 \frac{8}{15}$ 75

54.

Дано:

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Найти: сумму $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$

Решение.

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$ $\cdot x^2$ — умножение делаем при учете вычитаемых $\frac{x^5}{x^3}$, для облегчения решения уравнения.

$$Q(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 = 0$$

Вычитаем

$$(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 9) - (x^5 - x^4 + x^3 - x^2) = >$$

$$-2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x + 9$$

$$-2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x = >$$

$$-2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x = >$$

Вычитаем

$$(-2x^4 + x^3 + 2x^2 - 7x + 9) - (-2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x) = >$$

$$= > -x^3 + 4x^2 - 9x + 9 = >$$

$$= > -x^3 = (-1)$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			025-2-д1-119

$$Q(x) = -3x^3 + x^2 - x + 1 \quad (\cdot (-1))$$

$$(-x^3 + x^2 - x + 1) - (-x^3 + 4x^2 - 9x + 9) \geq 0$$

$$\geq 3x^2 - 8x + 8$$

$$R(x) = 3x^2 - 8x + 8$$

$$R(x_1) + R(x_2) + R(x_3) \geq 0$$

$$\geq (3x_1^2 - 8x_1 + 8) + (3x_2^2 - 8x_2 + 8) + (3x_3^2 - 8x_3 + 8) \geq 0$$

$$\geq 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 8(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot 8$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \quad \text{— по теореме Виета:}$$

$$1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 1$$

$$x_1 x_2 x_3 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)) \geq 0$$

подставим $\Rightarrow$

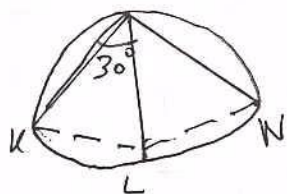
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

Итого:

$$3(-1) - 8(1) + 24 = -3 - 8 + 24 = 13$$

Ответ: 13

55. М



Дано: впис 4-х угольник.

$$S_{MNKL} = 31$$

$$\angle LMN = 30^\circ$$

Найти: $MN + MK$ - ?

Решение.

С помощью формулы площади 4-х угольника найдем стороны. Фигура впис 4-х угод. т.к. мы достроим стороны к угу. $KL \parallel MN$.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha \quad \text{подставим наши значения} \Rightarrow \frac{d_1 = MN}{d_2 = MK} \quad ?$$

$$31 = \frac{1}{2} MN \cdot MK \cdot \sin 30^\circ$$

$$31 = \frac{1}{4} MN \cdot MK$$

$$MN \cdot MK = 324$$

$\Rightarrow$ т.к. эти стороны явл хордами окружности тогда они явл равными и параллель.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			025-2-11-119

MN и MK - хорды окружности, и поскольку биссектриса делит угол NMK пополам, то они равны.

$$MN = MK = x$$

$$x^2 = 324$$

$$x = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN + MK = 18 + 18 = 36$$

Ответ: сумма $MN + MK = 36$

25