

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
145 (гектаркварт)	18.03.24	Лугиня Н.В.	

заг. 4.

по условию $b^2 - a^2 > b - a$

$(b - a)(b + a) > b - a$; $(b - a)(b + a - 1) > 0$ — сделаем перенос в левую часть. Так как $b + a < 1$ (из условия), то выражение $b + a - 1 < 0$, а значит $b - a < 0$ соответственно $\Rightarrow b < a$ ✓

Докажем неравенство: $b^3 - a^3 > b - a$; $(b - a)(b^2 + ab + a^2) > b - a$;

перенос и общий множитель: $(b - a)(b^2 + ab + a^2 - 1) > 0$; т.к. $b - a < 0$;

то нужно сравнить $b^2 + ab + a^2 - 1 > 0$. Этак как a и b

в отрезке $(0; \frac{1}{2})$, то $b^2 + ab + a^2 < 1$, а значит, что

$b^2 + ab + a^2 - 1 < 0$, и т.к. $b - a < 0$, то их произведение

будет больше нуля, а значит $b^3 - a^3 > b - a$ ✓

заг. 1

$$3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2023} = (3^{4046} + 2 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}) - 3 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012}$$

$$= 5^{1012} = (3^{2023} + 5^{1012})^2 - 3^{2024} \cdot 5^{1012} = (3^{2023} + 5^{1012})^2 - (3^{1012} \cdot 5^{506})^2 =$$

$$= (3^{2023} + 5^{1012})^2 - (3^{1012} \cdot 5^{506})^2 \Rightarrow \text{целое}$$

было разложено на множители, отличные от 1 и самого

исходного числа, что доказывает составность

исходного числа. ✓

заг. 3.

1-й шаг: т.к. сплав с буквой серебра равен для обоих брусков, то можем приравнять содержания сплавов 1-го и 2-ого и сплав с серебром и поделим на 4, чтобы получить среднее искомое значение:

$$\left(\frac{3}{10} + \frac{2}{10}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{40} = 0,125 \text{ или } 12,5\%$$

2-й вариант решения - метод подбора:

для удобства пусть все бруски весят одинаково - 10 ед.,

тогда и сразу тогда ствол 2-ух брусков будет иметь 6 ед. заплата

OK

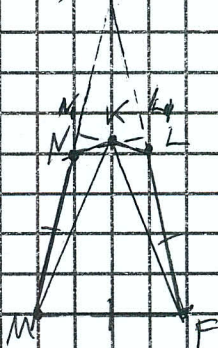
заг. 2 $x^4 - 2\sqrt{13}x^2 + x + 13 - \sqrt{13} = 0$

$$(x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{13} + 13) + x - \sqrt{13} = 0$$

$$(x^2 - \sqrt{13})^2 + x - \sqrt{13} = 0$$

OK

заг. 5.



Док-во:

при построении выпуклется

симметричная фигура, где $MK = KL \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_1K = KL_1$$

рассм $\triangle M_1KM$: M/M_1 меньше 1,

это \Rightarrow сильно меньше 1, тогда

самое с $\triangle KL_1F \Rightarrow NK + KL < 1$

OK