

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
| 15         |      | Евсеев      | Евсеев  |
| Шифр       |      |             | 041307  |

$$\begin{array}{r} 1121345 \\ 735 \end{array} \begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{array}$$

№1

$$\frac{x+y}{x-y} = 9$$

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

$$x^2 - 2,5xy + y^2 = 0$$

$$(x-y)^2 - 0,5xy = 0$$

$$(x-y)^2 = \frac{xy}{2}$$

$$x-y = \sqrt{\frac{xy}{2}}$$

$$x-y = \sqrt{\frac{xy}{2}}; \text{ т.к. } x > y; x-y > 0 \Rightarrow x-y = \sqrt{\frac{xy}{2}}; x-y = \sqrt{\frac{xy}{2}} \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = 2,5xy$$

$$(x+y)^2 - 2xy = 2,5xy$$

$$(x+y)^2 = 4,5xy$$

$$\text{аналогично } x+y > 0 \Rightarrow x+y = \sqrt{4,5xy}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{4,5xy}}{\sqrt{\frac{xy}{2}}} = \frac{\sqrt{4,5xy}}{\sqrt{\frac{xy}{2}}} = \sqrt{9} = 3$$

Ответ: 3

№2

$$a^2 - a \in \mathbb{Z}$$

$$a^4 - a \in \mathbb{Z}$$

Если  $a \in \mathbb{Z}$

$$a^4 - a^2 = a(a^3 - 1) = a(a-1)(a^2 + a + 1) = (a^2 - a)(a^2 + a + 1)$$

$$a^2 - a \in \mathbb{Z}$$

$$a^4 - a \in \mathbb{Z}$$

$$a^4 - a = a(a^3 - 1) = a(a-1)(a^2 + a + 1) = (a^2 - a)(a^2 + a + 1); a^2 - a \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } a \notin \mathbb{Z}, \Rightarrow \text{получили } \mathbb{Z}; a^4 - a - (a^2 - a) = a^4 - a^2 = (a^2 - a)(a^2 + a) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.к. } (a^2 - a)(a^2 + a) \text{ и } (a^2 - a)(a^2 + a) \in \mathbb{Z}; a^2 + a + 1, a^2 + a \text{ взаимно просты на } a \Rightarrow a^2 + a, a^2 + a \in \mathbb{Z}.$$

$$a^2 + a \in \mathbb{Z}, a^2 - a \in \mathbb{Z}; a^2 + a + a^2 - a \in \mathbb{Z} = 2a^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}; \text{ Ч.Т.Д.}$$

не доказано

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр

049307

$$\begin{aligned}
 a_n &= 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{2n^3 - 2n - 1}{n^4} + 1 = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^4 - 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \\
 &= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1 + 2n)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n + 1)^2}{n^4} = \\
 &= \frac{(n - 1)(n + 1)(n + 1)^2}{n^4} = \frac{(n - 1)(n + 1)^3}{n^4}
 \end{aligned}$$

Пусть  $n = 2$ ; тогда:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{82} = a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_{n+79} \quad \text{③}$$

$$= \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} \cdot \frac{n(n+2)^3}{(n+1)^4} \cdot \frac{(n+1)(n+3)^2}{(n+2)^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n+78)(n+80)^3}{(n+79)^4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} \cdot \frac{n(n+2)^3}{(n+1)^4} \cdot \dots \cdot \frac{(n+78)(n+80)^3}{(n+79)^4} = \\
 &= \frac{(n-1)(n+1)^3(n+2)^3 \dots (n+78)^3(n+80)^3}{n^4(n+1)^4(n+2)^4 \dots (n+79)^4} = \\
 &= \frac{(n-1)(n+80)^3}{n^4(n+79)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot 82^3}{16 \cdot 82} = \frac{82^3}{16 \cdot 82}$$

Ответ:  $\frac{82^3}{16 \cdot 82}$