



Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23	12.03.20	Глебушина И. В.	<i>И.В.</i>

1  $x \geq 0$

$$(x-|x|)^2 + x + |x| = 2020$$

$$x^2 - 2x^2 + x^2 + x + x = 2020$$

$$x + x = 2020$$

$$2x = 2020$$

$$\begin{cases} x = 1010 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x < 0$

$$(x+x)^2 + x - x = 2020$$

$$x^2 + 2x + x^2 + x - x = 2020$$

$$4x^2 = 2020$$

$$x^2 = 505$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{505} \\ x < 0 \end{cases}$$

7

Ответ:  $x = 1010; x = -\sqrt{505}$

2 1 способ

$a$  - двузначное число  
 1)  $a = 4d_1 + 3$  (делится на 4, остаток 3)  
 2)  $a = 3d_2 + 2$  (делится на 3, остаток 2)  
 Добавим к 1) единицу  
 $a+1 = 4d_1 + 4$  ← Должно делиться на 4  
 $a+1 = 12$

2 способ

$$a = 4d_1 + 3$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$11 \cdot 12 = 23$$

$$23 + 12 = 35 \text{ и т.д.}$$

Числа, удовлетворяющие условию

- 11
- 23
- 35
- 47
- 59
- 71
- 83
- 95

7

3

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$g(x) = x^2 + ax + d$$

$$0 < a < b < c < d$$

Предположим, что есть какая-либо точка  $x_0$  в которой эти параболы имеют общее решение, тогда:

$$x_0^2 + bx_0 + c = x_0^2 + ax_0 + d$$

$$bx_0 - ax_0 = d - c$$

$$x_0(b-a) = d-c \Rightarrow x_0 > 0$$

вершина параболы

$$f(x) = -\frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2} < -\frac{a}{2}$$

$$g(x) = -\frac{a}{2}$$

→ вершины лежат левее 0 ⇒ что общее решение будет отрицательным, а так как  $x_0 > 0$ , такою быть не может

Но

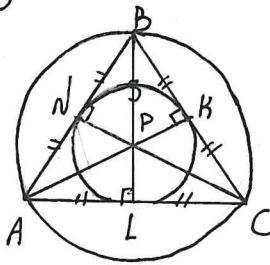
так как это параболы с ветвями  $\uparrow$  направленными вверх, они в любом случае должны пересечься, т.к. ветви бесконечны.

2

№4  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \rightarrow$  умножим все на 2  
 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$   
 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2bc - 2ca \geq 0$   
 $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 + 2bc + c^2) + (a^2 - 2ca + c^2) \geq 0$   
 $(a-b)^2 + (b+c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$

7

№5



$$AB^2 + PC^2 = BC^2 + AP^2 = AC^2 + BP^2$$

Допустим  $\triangle ABC$  - равносторонний

- 1) Проведем высоты  $BL, NC, KA$
- 2) По свойству равностороннего  $\triangle$  ка  $BL, NC, KA$  - высоты к основанию  $\Rightarrow$  что они медианы и биссектрисы,  $\Rightarrow AN = NB = BK = KC = CL = LA = x$   
 $AB = BC = CA = 2x$

- 3)  $\triangle NBP$  и  $\triangle BNP$  равны по катету и гипотенузе  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle ANP = \triangle BNP = \triangle BKP = \triangle CKP = \triangle CLP = \triangle APL$   
 $PL = PK = PN$

Впишем окружность с центром в точке  $P$ , радиуса  $PK$   
 Опíšем окружность с центром в точке  $P$ , радиуса  $PB$  }  $\Rightarrow$  точка  $P$  - центр вписанной и описанной окружности