

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
11		Кореньков	М
Шифр			043002

1.)

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

Разделим обе части на y^2

$$\frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{10}{3} \frac{x}{y}$$

Пусть $z = \frac{x}{y}$ т.к. $x > y$, то $z > 1$

$$z^2 + 1 = \frac{10}{3}z \quad \text{умножим все на 3}$$

$$3z^2 + 3 = 10z$$

$$3z^2 - 10z + 3 = 0$$

$$a = 3 \quad b = -10 \quad c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{10+8}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

$$z_2 = \frac{10-8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Следовательно $\frac{x}{y} = 3$, откуда $x = 3y$

Куда же делись?

Подставим в выражение $\frac{x+y}{x-y}$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{(3y+y)}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2$$

Ответ: 2

2.)

$$a \geq 1, \quad b \geq 2, \quad c \geq 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

$$\text{Док - м: } a + b + c \geq 7$$

Возьмем минимальные значения a, b и c .

$$a = 1$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad (\text{Неподходит})$$

Наче.

$$b = 2$$

Возьмем c за 4

$$\text{Значит: } a + b + c \geq 7$$

$$c = 3$$

$$a = 1$$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

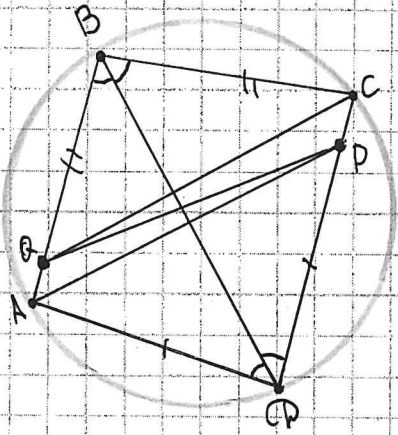
$$b = 2$$

$$c = 4$$

т.е.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

5.)



Дано: $ABCD$ - вписан в окр.

$$CP = AP; BC = BQ$$

прямая BQ делит отрезок PQ пополам?

Решение:

Т.к. $ABCD$ - вписан в окр; то

$$\angle B + \angle D = 180^\circ \text{ и } \angle C + \angle A = 180^\circ$$

Т.к. $CP = PA$, $BQ = BC$ значит $\triangle CAP \sim \triangle CBQ$
 $PQ \parallel AB$ $\Rightarrow$ м. б

$PO = QO$, т.к. м. P и м. Q равноудалены
на прямых, параллельных соответствующим
сторонам. $\Rightarrow$ Верно, что BQ
делит PQ пополам.

4.)

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2p^2}\right)^2 = p^4 + \frac{1}{2p^4}$$

Найдем минимум функции:

$$S(p) = 4p^3 - \frac{2}{p^5} = 0 \Rightarrow 4p^3 = \frac{2}{p^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$$

подставим выражение для

$$x_1^4 + x_2^4; x_1^4 + x_2^4 =$$

$$= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} + 2$$

Ответ: для корней

x_1, x_2 многочлена

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} \text{ и любого}$$

ненулевого значения p

выполняется неравенство

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 1 + \sqrt{2}$$



Открытая региональная
межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$3.) a_n = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4}$$

$$a_1 = 1 + \frac{2}{1} - \frac{2}{1^3} - \frac{1}{1^4} = 1 + \frac{2}{1} - \frac{2}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

$$a_2 = 1 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^3} - \frac{1}{2^4} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{27}{16}$$

$$a_3 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3^3} - \frac{1}{3^4} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} - \frac{1}{81} = \frac{728}{81}$$

$$a_2 \cdot a_3 = \frac{8}{3}$$

$$a_4 = 1 + \frac{2}{4} - \frac{2}{4^3} - \frac{1}{4^4} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{256} = \frac{375}{256}$$

$$a_5 = 1 + \frac{2}{5} - \frac{2}{5^3} - \frac{1}{5^4} = 1 + \frac{2}{5} - \frac{2}{125} - \frac{1}{625} = \frac{864}{625}$$

$$a_4 \cdot a_5 = \frac{375}{256} \cdot \frac{864}{625} = \frac{3}{8} \cdot \frac{27}{5}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{27}{5}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{27}{5}$$

$$a_{99} =$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{99} =$$

Амбени.

✓