

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
12		Коряков	И
Шифр			042004

$$1. \quad x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy \quad / : 3$$

$$3x^2 + 3y^2 = 10xy$$

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy = 0 \quad / : (x^2)$$

$$3 + \frac{3y^2}{x^2} - \frac{10y}{x} = 0$$

$$\text{Замена: } d = \frac{y}{x}$$

$$3 + 3d^2 - 10d = 0$$

$$3d^2 - 10d + 3 = 0$$

$$D = 100 - 36 = 64$$

$$d_1 = \frac{10+8}{6} = \frac{3}{1} = 3$$

$$d_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 12 \end{array} \quad \text{и}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} d = \frac{y}{x} \\ d = \frac{y}{x} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > y \\ x > y \end{cases} \quad \text{— условие не выполняется}$$

$$\begin{cases} d = \frac{y}{x} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > y \end{cases} \quad \text{— условие выполнено}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ 2. X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Дано:

$$2. \quad a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3; \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

Доказать: $a + b + c \geq 7$

Решение:

1. Предположим:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{array} \right\} a + b + c = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{array} \right\} a + b + c = 7 \text{ (верно)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{1} \\ b = \frac{16}{8} \\ c = \sqrt{16} \end{array} \right\} a + b + c = 7 \text{ (верно)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq 1 \\ b \geq 2 \\ c \geq 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq 21 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \geq 1 \\ b \geq 2 \\ c \geq 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 16 = 21 \text{ (условие выполнено)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq \sqrt{1} \\ b \geq \frac{16}{8} \\ c \geq 3^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq 21 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \geq \sqrt{1} \\ b \geq \frac{16}{8} \\ c \geq 3^2 \\ 1 + 4 + 81 = 86 \geq 21 \text{ (условие выполнено)} \end{array} \right.$$

Ч. т. д.

✓

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$3. \quad a_n = 1 + \frac{n^1}{n} - \frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4}{n^4} + \frac{2n^3}{n^4} - \frac{2n}{n^4} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4}$$

$$a_n = \frac{(n+1)^3(n-1)}{n^4} \quad \text{легко увидеть}$$

$$a_2 = \frac{(2+1)^3(2-1)}{2^4} = \frac{3^3 \cdot 1}{2^4}$$

$$a_3 = \frac{(3+1)^3(3-1)}{3^4} = \frac{4^3 \cdot 2}{3^4}$$

$$a_4 = \frac{(4+1)^3(4-1)}{4^4} = \frac{5^3 \cdot 3}{4^4}$$

$$a_5 = \frac{(5+1)^3(5-1)}{5^4} = \frac{6^3 \cdot 4}{5^4}$$

$$a_6 = \frac{(6+1)^3(6-1)}{6^4} = \frac{7^3 \cdot 5}{6^4}$$

легко увидеть

$$a_{96} = \frac{(96+1)^3(96-1)}{96^4} = \frac{97^3 \cdot 95}{96^4}$$

$$a_{97} = \frac{(97+1)^3(97-1)}{97^4} = \frac{98^3 \cdot 96}{97^4}$$

$$a_{98} = \frac{(98+1)^3(98-1)}{98^4} = \frac{99^3 \cdot 97}{98^4}$$

$$a_{99} = \frac{(99+1)^3(99-1)}{99^4} = \frac{100^3 \cdot 98}{99^4}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_{96} \cdot a_{97} \cdot a_{98} \cdot a_{99}$$

$$\frac{3^3 \cdot 1}{2^4} \cdot \frac{4^3 \cdot 2}{3^4} \cdot \frac{5^3 \cdot 3}{4^4} \cdot \frac{6^3 \cdot 4}{5^4} \cdot \dots \cdot \frac{97^3 \cdot 95}{96^4} \cdot \frac{98^3 \cdot 96}{97^4} \cdot \frac{99^3 \cdot 97}{98^4} \cdot \frac{100^3 \cdot 98}{99^4} = \frac{100^3 \cdot 50}{99} = \frac{125000}{99}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

§ 4.

$$x_1 + x_2 = -b = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \quad \text{— по теореме Виета}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2}\right) = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2} =$$

$$= p^4 + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{2p^4} + 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

отсюда

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{1}{2} p^4 \geq \sqrt{2}$$

?

на том

н.т.г